

# BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA  
DE MATEMÀTIQUES

Institut d'Estudis Catalans

## í n d e x \_\_\_\_\_

- Rosa Camps, Xavier Mora i Laia Saumell*  
El mètode d'Eneström i Phragmén per a elegir un òrgan de representació mitjançant llistes obertes ..... 113
  
- Núria Fagella i Joan Porti*  
Dos teoremes i una demostració de Dennis Sullivan ..... 143
  
- Guillem Perarnau*  
Grafs aleatoris amb una seqüència de graus donada ..... 165
  
- English summaries ..... 201



Volum 38 • Número 2 • Any 2023



Institut  
d'Estudis  
Catalans



# BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA

DE MATEMÀTIQUES

Institut d'Estudis Catalans

Volum 38 • Número 2 • Desembre 2023

BARCELONA  
2023

© dels autors dels articles

Editat per la Societat Catalana de Matemàtiques  
filial de l'Institut d'Estudis Catalans  
Carrer del Carme, 47  
08001 Barcelona

Text original revisat lingüísticament  
per la Unitat d'Edició del Servei Editorial de l'IEC

Compost per Rosa M. Rodríguez  
Imprès a Ediciones Gráficas Rey, SL

ISSN: 0214-316-X  
Dipòsit Legal: B 19272-1987



Els continguts del BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES estan subjectes —llevat que s'indiqui el contrari en el text o en el material gràfic— a una llicència Reconeixement - No comercial - Sense obres derivades 3.0 Espanya de Creative Commons, el text complet de la qual es pot consultar a <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>. Així, doncs, s'autoritza el públic en general a reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada.

## Índex

ROSA CAMPS, XAVIER MORA I LAIA SAUMELL	
El mètode d'Eneström i Phragmén per a elegir un òrgan de representació mitjançant llistes obertes .....	113
NÚRIA FAGELLA I JOAN PORTI	
Dos teoremes i una demostració de Dennis Sullivan .....	143
GUILLEM PERARNAU	
Grafs aleatoris amb una seqüència de graus donada .....	165
English summaries .....	201



## El mètode d'Eneström i Phragmén per a elegir un òrgan de representació mitjançant llistes obertes

ROSA CAMPS, XAVIER MORA I LAIA SAUMELL

**Resum:** L'elecció d'un òrgan de representació mitjançant una votació de llistes obertes requereix un algorisme adient per a determinar quins candidats resulten seleccionats. L'opció de seleccionar els més votats té el greu inconvenient que pot deixar molts electors sense representació. En aquest treball estudiem un algorisme alternatiu més just que va ser proposat al tombant dels segles XIX i XX per Gustaf Eneström i Edvard Phragmén. En comú amb altres propostes del mateix Phragmén, se suposa que els votants s'expressen mitjançant el vot d'aprovació, és a dir, cada elector indica una llista no ordenada dels candidats que li semblen bé com a representants seus. A diferència d'altres mètodes del mateix tipus, aquí es comença fixant una quota, és a dir, el nombre de vots que donen dret a un escó. De fet, el mètode d'Eneström i Phragmén es pot veure com una extensió del mètode de les restes majors a llistes obertes en lloc de llistes tancades, o també com una adaptació del vot únic transferible al vot d'aprovació en comptes del vot preferencial. Les propietats d'aquest mètode s'estudien i es comparen amb les d'altres mètodes del mateix tipus.

**Paraules clau:** llistes obertes, elecció d'un òrgan de representació, eleccions parlamentàries, representació proporcional, mètode d'Eneström i Phragmén.

**Classificació MSC2020:** 91B12, 91B14.

### Introducció

*Per a elegir un òrgan de representació mitjançant llistes obertes no ordenades no és apropiat triar els més votats, ja que aquests poden correspondre només a una part de l'electorat, potser fins i tot minoritària en comparació amb el total. Suposem, per exemple, que es tracta d'elegir quatre representants i que els vots són com segueix:*

$$38 \ a \ b \ c \ d, \quad 33 \ k \ l \ m \ n, \quad 29 \ p \ q \ r \ s, \quad (1)$$

on volem dir que 38 electors admetrien com a representants seus qualssevol dels candidats  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , mentre que 33 electors indiquen els candidats  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , i uns altres 29 electors es pronuncien per  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ . Aquests

---

Aquest article és una adaptació al català del nostre manuscrit «The method of Eneström and Phragmén for parliamentary elections by means of approval voting» (<https://arxiv.org/abs/1907.10590>).

vots tenen l'aspecte de correspondre a unes llistes tancades. Tanmateix, també són compatibles amb un plantejament de llistes obertes, ja que aquest plantejament no impedeix que diversos electors votin la mateixa llista. Sigui com sigui, amb els vots (1) la regla dels més votats elegeix els candidats *a, b, c, d*, que tenen tots ells 38 vots. Aquest resultat concentra tota la representació en un 38% de l'electorat i deixa sense representació el 62% restant. En lloc d'això, un bon algorisme hauria de procurar donar representació a tots els electors de manera equitativa.

Darrerament, s'ha recuperat l'interès per diversos mètodes de finals del segle XIX que desenvolupen aquesta idea en el cas de llistes obertes. Vegeu, per exemple, [1, 2, 3, 15, 16, 20, 22] i les seves referències.

En aquest article analitzem una proposta concreta que està associada amb els noms de Gustaf Eneström i Edvard Phragmén. Com en altres obres més conegudes de Phragmén ([25, 26, 27, 29]), se suposa que els electors s'expressen mitjançant el *vot d'aprovació*, és a dir, que cada elector indica una llista no ordenada dels candidats que aprova per a representar-lo. Tanmateix, el procediment d'Eneström i Phragmén difereix del d'aquelles altres obres en què es comença per fixar la *quota*, és a dir, el nombre de vots que donarà dret a un escó. De fet, el mètode que estudiem es pot veure com una extensió al cas de llistes obertes no ordenades de dos mètodes clàssics de representació proporcional que també comencen per fixar la quota, a saber, el mètode del vot únic transferible i el de les restes majors.

INDÉPENDANTS		CATHOLIQUES		LIBÉRAUX		SOCIALISTE	
AERENS		BAERT		BRESOUS		VAN LOO	
BAETSLÉ		DENY		COENE			
MAES		GHYS		HEINS			
		RAES		PULS			
		TACK		ROELS			
		VERY		WEBER			

FIGURA 1: Exemple de butlleta de llista oberta segons D'Hondt [6]. L'elector pot marcar fins a sis candidats qualssevol, possiblement de llistes diferents. Alternativament, pot marcar una de les caselles de la part superior, que equival a marcar tots els candidats d'aquella llista.



El mètode del *vot únic transferible* utilitza el *vot preferencial*, és a dir, cada elector indica no només el seu candidat preferit, sinó que també pot donar una segona opció, una tercera, i així successivament fins on cregui oportú. Per a determinar quins candidats són elegits, es comença per fixar la quota, és a dir, el nombre de vots que ha d'aconseguir o superar un candidat per tal de resultar elegit. En principi, cada candidat té només els vots on apareix com a primera opció. Tanmateix, quan un candidat supera la quota i resulta elegit, cadascun dels vots sobrants és transferit al candidat que ocupa el lloc següent en la butlleta. La idea és aplicar aquest procés reiteradament fins que quedin assignats tots els escons que hi havia per repartir. Si en algun moment s'escau que no hi ha cap candidat que assoleixi la quota, aleshores s'elimina el que en aquell moment té menys vots i cadascun d'aquests vots és transferit al candidat següent en la butlleta. I si només resten en peu tants candidats com escons pendents de repartir, llavors s'admeten tots aquests candidats, sigui quin sigui el seu nombre de vots. Per a més detalls remetem el lector a [39].

El mètode de les *restes majors* suposa que els electors es limiten a triar entre diverses llistes tancades, és a dir, unes llistes disjunctes de candidats les quals han estat plantejades prèviament. A partir dels vots obtinguts per cada llista, es tracta de determinar quants representants corresponen a cadascuna d'elles. Amb aquesta finalitat, es pren el nombre de vots de cada llista i es divideix per la quota. D'entrada, cada llista rep tants escons com indica la part entera del quocient. Si això no adjudica tots els escons, llavors els que queden són assignats un a un a les llistes que obtenen els residus majors en les divisions precedents.

El mètode que estudiem en aquest article va ser formulat clarament per Eneström el 1896 [7]. Posteriorment, Gustav Cassel va descriure el mateix procediment el 1903 [5] sota el nom de «primer mètode de Phragmén». De fet, la idea bàsica del procediment és present en una ressenya a la premsa d'una conferència que Phragmén havia pronunciat el 1893 [24] (tot i que la proposta final d'aquella conferència es basava en el vot preferencial). En els anys següents, Phragmén es va concentrar en una idea diferent, sense cap comentari sobre el treball d'Eneström [7] (que de ben segur que coneixia; vegeu les cartes als diaris d'Eneström i Phragmén [8, 28], publicades conjuntament el mateix dia). Tanmateix, més tard va tornar a la idea inicial (però en termes del vot d'aprovació) i va considerar diverses variacions. Això es va fer en tres memòries de difusió molt limitada de 1906 [30, 31, 32].

Aquestes memòries van ser motivades per una petició de Finlàndia arran d'una reforma parlamentària. Aquesta petició s'havia dirigit a Gösta Mittag-Leffler i als seus col·legues matemàtics d'Estocolm, que també estaven interessats en el tema per al cas de Suècia mateix [36, p. 512-513].

Dit això, ni Finlàndia ni Suècia no van adoptar la proposta de Phragmén.

En el cas de Finlàndia, es va adoptar (1907) un mètode basat en el vot preferencial. Concretament, es va adoptar el mètode de Borda harmònic, que descrivim a l'apartat 5.5.

En el cas de Suècia, es va adoptar (1909) un mètode basat en el vot d'aprovació. Tot i que en principi no era obligatori, a la pràctica la major part dels electors restringien la seva llista a un partit, el qual indicaven en el seu vot. L'algorisme es reduïa llavors essencialment a aplicar la regla de D'Hondt junt amb unes regles suplementàries per a determinar quins candidats concrets s'elegien de cada partit. Una d'elles és la regla d'addició de Thiele, la qual descrivim a l'apartat 5.2.1.

Per a més detalls històrics remetem el lector a [13, apèndixs III, IV], així com a [15].

Com veurem, el mètode d'Eneström i Phragmén —més concretament, la variant que detallarem a continuació— gaudeix d'unes propietats de proporcionalitat (teoremes 2.1 i 2.2) que no tenen ni el mètode de Borda harmònic, llavors adoptat per Finlàndia, ni el d'addició de Thiele, llavors adoptat per Suècia. D'altra banda, la comparació amb la proposta de Phragmén de 1894-1899 —anomenada «segon mètode de Phragmén» per Cassel [5]— és més disputada, amb algun avantatge a favor del mètode d'Eneström i Phragmén pel que fa a la simplicitat.

A més de candidats individuals, també permetrem que un candidat sigui un conjunt format per diversos individus. Això és adequat per a tractar el cas, hipotètic però amb prou de sentit, en què les opcions que se sotmeten al vot d'aprovació no són candidats individuals, sinó unes candidatures col·lectives disjunctes (similarment a [12], on es fa una proposta d'aquest tipus però usant el vot preferencial). En aquest cas, s'espera que el mètode respongui a la pregunta de quants escons s'han d'assignar a cada candidatura.

## 1 El procediment

### 1.1 Preliminars

El procediment d'Eneström i Phragmén reparteix un nombre determinat d'escons entre diversos candidats que han estat sotmesos a un vot d'aprovació per un conjunt d'electors. Té un caràcter iteratiu. En cada pas s'assigna un escó al candidat amb el major nombre de vots i els vots utilitzats perden una fracció del seu valor d'acord amb una quota fixada prèviament.

Utilitzarem la *notació* següent:

$n$	nombre d'escons a repartir
$I$	conjunt de candidats elegibles
$i$	un candidat
$m_i$	capacitat del candidat $i$ , és a dir, nombre d'escons que pot omplir (= 1 per a candidats individuals)
$k$	un «tipus» de vots (o electors)
$A_k$	conjunt de candidats aprovats pels electors $k$ (suposem $A_k \neq \emptyset$ )
$k \surd i$	una altra manera de dir que $i \in A_k$

$v$	nombre total de vots
$v_k$	nombre de vots de tipus $k$ ( $\sum_k v_k = v$ )
$w_i$	nombre de vots que aproven $i$ : $w_i = \sum_{k \succ i} v_k$
$n_i$	nombre d'escons assignats al candidat $i$ ( $n_i \leq m_i$ )
$J$	un subconjunt de candidats
$m_J$	capacitat del conjunt $J$ : $m_J = \sum_{i \in J} m_i$
$v_J$	nombre de vots que aproven exactament el conjunt $J$ : $v_J = \sum_{k, A_k = J} v_k$
$\mathcal{Y}_J$	nombre de vots que aproven tots els candidats de $J$ : $\mathcal{Y}_J = \sum_{k, A_k \supseteq J} v_k$ , evidentment, $v_J \leq \mathcal{Y}_J$
$n_J$	nombre total d'escons assignats a membres de $J$ : $n_J = \sum_{i \in J} n_i$
$q$	quota, és a dir, nombre de vots que donen dret a un escó
$s$	número ordinal en el procés iteratiu d'assignació d'escons
$x[s]$	valor de $x$ després d'assignar l'escó $s$ , on $x$ pot ser $v, v_k, w_i, n_i, \dots$
$I[s]$	conjunt de candidats encara elegibles després d'assignar l'escó $s$ , és a dir, tals que $n_i[s] < m_i$

## 1.2 Versió bàsica

Les obres d'Eneström i Phragmén contenen diferents variacions en diversos aspectes. Per tal d'aconseguir millors propietats, hem triat la combinació particular que es descriu a continuació (que no és exactament cap de les versions considerades per aquests autors).

Per començar, s'adopta la quota (no arrodonida) de Droop i Hagenbach-Bischoff [33]:

$$q = v / (n + 1).$$

Els  $n$  escons s'assignen mitjançant un procediment iteratiu. D'ara endavant,  $s$  serà un comptador que augmentarà de 0 a  $n$ . Comencem amb  $s = 0$ ,  $v_k[0] = v_k$  (el nombre de vots de cada tipus  $k$ ),  $n_i[0] = 0$  (no s'ha assignat cap escó) i  $I[0] = I$  (tots els candidats són elegibles).

Per a cada  $s$  i cada  $i \in I[s]$  (els candidats elegibles) es tenen en compte els vots actualment existents a favor del candidat  $i$ :

$$w_i[s] = \sum_{k \succ i} v_k[s].$$

L'escó  $s + 1$  s'assigna a un candidat  $i_* \in I[s]$  que maximitzi aquest nombre de vots, és a dir, tal que

$$w_{i_*}[s] = \max_{i \in I[s]} w_i[s] =: w_*[s]$$

(si hi ha diversos maximitzadors, es permet qualsevol d'ells). Per tant,

$$n_{i_*}[s + 1] = n_{i_*}[s] + 1,$$

i aquest candidat deixa de ser elegible si ha exhaurit la seva capacitat:

$$I[s + 1] = I[s] \setminus \{i_*\}, \quad \text{si } n_{i_*}[s + 1] = m_{i_*}.$$

L'assignació de l'escó  $s + 1$  al candidat  $i_*$  es fa a canvi d'una determinada fracció dels  $w_*[s]$  vots que li donen suport. Més concretament, els vots a favor de  $i_*$  perden valor d'acord amb un factor comú:

$$v_k[s + 1] = \left(1 - \frac{q}{w_*[s]}\right) v_k[s], \quad \text{si } k \sqrt{i_*} \text{ i } w_*[s] \geq q, \quad (2)$$

$$v_k[s + 1] = 0, \quad \text{si } k \sqrt{i_*} \text{ i } w_*[s] < q, \quad (3)$$

$$v_k[s + 1] = v_k[s], \quad \text{si } k \not\sqrt{i_*}. \quad (4)$$

Com es pot comprovar fàcilment, en el cas  $w_*[s] \geq q$  es compleixen les igualtats següents:

$$w_{i_*}[s + 1] = w_{i_*}[s] - q, \quad (5)$$

$$v[s + 1] = v[s] - q. \quad (6)$$

És a dir, l'escó  $s + 1$  s'ha assignat exactament a canvi d'una quota.

En el cas  $w_*[s] < q$ , l'escó s'assigna a canvi de tots els vots existents a favor de  $i_*$ , malgrat que no compleixin una quota. Per tant, en aquest cas es té

$$w_{i_*}[s + 1] = 0, \\ v[s + 1] > v[s] - q.$$

Si  $s + 1 = n$ , ja hem acabat. En cas contrari, es repeteix el procediment canviant  $s$  per  $s + 1$ .

OBSERVACIÓ 1.1. Estem suposant que el conjunt de candidats  $i$  tals que  $w_i > 0$  conté almenys  $n$  elements.

OBSERVACIÓ 1.2. De les igualtats (2)-(4) se'n dedueix que  $v_k[s]$ ,  $w_i[s]$  i  $w_*[s]$  són funcions no creixents de  $s$ .

Més avall serà d'utilitat el lema següent, que és conseqüència immediata de (6) i del fet que  $\max_i v_i[n] \leq \sum_i v_i[n]$ :

LEMA 1.1. Si  $w_*[s] \geq q$  per a tota  $s < n$ , llavors  $w_*[n] \leq v[n] = v[0] - nq = q$ .

EXEMPLE 1.1. Considerem l'elecció de tres representants entre els nou candidats  $a, b, e, f, u, v, x, y, z$  amb els vots d'aprovació següents:

$$s = 0: 21 abx, 20 abef, 19 efuv, 13 uv, 10 xy, 15 z, 2 ae u.$$

El nombre total de vots és  $v = 100$ . Per tant, la quota és  $q = v/(n + 1) = 100/4 = 25$ . Segons aquests vots, el suport  $w_i$  que té cada candidat  $i$  és el següent:

$$s = 0: a 43, b 41, e 41, f 39, u 34, v 32, x 31, y 10, z 15.$$

El valor més alt és el del candidat  $a$ , que, per tant, resulta escollit. D'acord amb (2), els vots que contenen  $a$  veuen reduït el seu valor segons el factor  $(1 - 25/43) = 0.419$ . Això dona com a resultat les xifres següents de vots:

$$s = 1: 8.791 \ a b x, \quad 8.372 \ a b e f, \quad 19 \ e f u v, \quad 13 \ u v, \\ 10 \ x y, \quad 15 \ z, \quad 0.837 \ a e u.$$

El suport que té ara cada candidat és el següent, on utilitzem parèntesis per a indicar aquells candidats que ja han estat elegits i, per tant, ja no són elegibles:

$$s = 1: (a \ 18), \quad b \ 17.163, \quad e \ 28.209, \quad f \ 27.372, \quad u \ 32.837, \\ v \ 32, \quad x \ 18.791, \quad y \ 10, \quad z \ 15.$$

Així doncs, el segon candidat escollit és  $u$ . Els vots que contenen aquest candidat es redueixen ara pel factor  $(1 - 25/32.837) = 0.239$ :

$$s = 2: 8.791 \ a b x, \quad 8.372 \ a b e f, \quad 4.535 \ e f u v, \quad 3.103 \ u v, \\ 10 \ x y, \quad 15 \ z, \quad 0.200 \ a e u,$$

que dona lloc als valors següents de  $w_i$ :

$$s = 2: (a \ 17.363), \quad b \ 17.163, \quad e \ 13.107, \quad f \ 12.907, \\ (u \ 7.837), \quad v \ 7.637, \quad x \ 18.791, \quad y \ 10, \quad z \ 15.$$

Per tant,  $x$  és elegit en tercer lloc, tot i tenir menys d'una quota. Els tres candidats triats són, doncs,  $a$ ,  $u$  i  $x$ . Tot i que ja sabem qui ha estat triat, més endavant (secció 7) necessitarem conèixer també els vots romanents, que són els següents:

$$s = 3: 0 \ a b x, \quad 8.372 \ a b e f, \quad 4.535 \ e f u v, \quad 3.103 \ u v, \\ 0 \ x y, \quad 15 \ z, \quad 0.200 \ a e u.$$

### 1.3 Variants

**1.3.1 Fraccions simples.** A [30, 31, 32] les equacions (2)-(3) són substituïdes per la següent:

$$v_k[s + 1] = \left( 1 - \frac{1}{\lceil w_*[s]/q \rceil} \right) v_k[s], \quad \text{per a } k \leq i_* \quad (7)$$

Noteu que aquesta equació coincideix amb (2)-(3) en el cas  $w_*[s] \leq q$ . Tanmateix, quan  $w_*[s]/q$  no és enter i supera 1, l'escó s'assigna a canvi de menys d'una quota; en altres paraules, els signes d'igualtat de (5) i (6) se substitueixen per « $\geq$ ». Probablement, el factor racional de (7) estava pensat per a facilitar el càlcul a mà. Una altra possible motivació podria ser la comparació amb el mètode d'addició de Thiele (vegeu l'apartat 5.2.1).

**1.3.2 Altres quotes.** Les versions inicials d'aquest mètode [7, 30, 31] (vegeu també [5, p. 47-50]) usaven la quota de Hare (també anomenada *quota simple*)  $q = v/n$ . Amb aquesta quota, el procediment anterior és una extensió del mètode estàndard de les restes majors. Segons Mittag-Leffler [21], la quota de Droop i Hagenbach-Bischoff aconseguix resultats millors en comparació amb el mètode d'addició de Thiele (vegeu les propietats de proporcionalitat que estudiem a la secció 2 i la seva manca a l'apartat 5.2.1). D'altra banda, també cal notar que la quota de Droop i Hagenbach-Bischoff ja havia estat utilitzada per Phragmén el 1893 [24] en càlculs anàlegs a (2)-(4).

**1.3.3 Quota actualitzada a cada pas.** [30] utilitza la fórmula (7), però la quota (de Hare)  $q = v[0]/n$  es va actualitzant d'acord amb l'expressió  $q'[s] = v[s]/(n - s)$  (com si cada vegada tornéssim a començar amb els vots i escons que queden en aquell moment). Noteu que  $q'[s]$  no difereix de  $q$  fins que no s'assignen escons per menys d'una quota.

**1.3.4 Els vots deixen de comptar quan queden buits** (aquesta variant només canvia les coses quan es combina amb l'anterior). En aquesta variant, l'equació (2) només s'utilitza quan els vots de tipus  $k$  contenen més candidats elegibles, és a dir, quan  $A_k \cap I[s+1] \neq \emptyset$ ; en cas contrari, es posa  $v_k[s+1] = 0$ .

**1.3.5 Condició de llindar.** Quan hi ha un gran nombre de candidats, llavors pot passar fàcilment que  $w_*[s]$  sigui molt més petit que  $q$  i, per tant,  $i_*$  aconseguixi un escó amb molt menys d'una quota. En relació amb això, Phragmén ([31, 32]) proposava d'exigir una condició de la forma  $w_*[s]/q \geq \alpha$  per a algun llindar  $\alpha \in [0, 1]$  fixat prèviament; si no es compleix aquesta condició, el procediment s'aturaria i es convocarien noves eleccions. Més concretament, va suggerir  $\alpha = 3/4$  [31, 32] o  $\alpha = 1/2$  [30]. En la nostra versió bàsica no hem inclòs aquesta condició, la qual cosa equival a prendre  $\alpha = 0$  (tal com passa amb la formulació habitual del mètode de les restes majors).

**1.3.6 Nombres negatius de vots.** Aquesta variant aplica (2) independentment de si  $w_*[s]$  és més gran o més petit que  $q$ . Això pot donar lloc a valors negatius de  $v_k[s+1]$  per a  $k \neq i_*$ . Tot i així, podria tenir sentit per a evitar una sobrerepresentació dels electors de tipus  $k$  en passos posteriors.

## 1.4 Vot uninominal

Les proposicions següents especifiquen el comportament del mètode d'Eneström-Phragmén en el cas del vot uninominal, és a dir, quan cada elector aprova un candidat i només un. La primera proposició, la prova de la qual és òbvia, es refereix al cas de candidats individuals. La segona es refereix al cas de candidats col·lectius disjunts (llestes tancades).

PROPOSICIÓ 1.1. *Suposem que tots els candidats tenen capacitat 1 i que cada elector n'aprova un i només un. En aquest cas, el mètode d'Eneström-Phragmén consisteix a seleccionar els  $n$  candidats més votats.*

En el cas de candidats individuals, la situació uninominal és certament poc desitjable en l'esperit de la representació proporcional, perquè una majoria simple d'electors podria organitzar-se per a aconseguir més escons dels que li corresponen. No obstant això, en aquesta situació no hi ha millor opció que triar els candidats més votats. Afortunadament, a la pràctica, els electors es veuran conduïts a aprovar més d'un candidat. Els que tinguin una opinió minoritària ho faran per proporcionar candidats alternatius amb més possibilitats. I els que tinguin una opinió majoritària ho faran per obtenir més representants.

En el cas de les llistes tancades (disjunctes), la situació uninominal sí que permet un resultat en l'esperit de la representació proporcional:

PROPOSICIÓ 1.2. *Suposem que tots els candidats tenen capacitat il·limitada i que cada elector n'aprova un i només un. En aquest cas, el mètode d'Eneström-Phragmén equival al mètode de les restes majors amb la quota de Droop.*

DEMOSTRACIÓ. Aquí cada tipus  $k$  correspon a un sol candidat  $i$  i viceversa. Per tant, podem escriure  $v_i$  en lloc de  $v_k$  o  $w_i$ . A continuació distingirem dos casos.

Cas (a):  $w_*[n] < q$ . Considerem el número

$$t = \min\{s \mid w_*[s] < q\}, \quad (8)$$

i sigui  $t_i$  el nombre d'escons que han estat assignats a  $i$  en els primers  $t$  passos del procediment, és a dir, per a  $s = 0 \dots t-1$ . La hipòtesi que defineix aquest cas garanteix que  $t \leq n$ . Segons la definició de  $t$ , per a  $s < t$  cada escó és assignat a canvi d'una quota exacta. Per tant,  $v_i[t] = v_i[0] - t_i q$ , o, equivalentment,

$$v_i[0] = t_i q + v_i[t], \quad \text{on } 0 \leq v_i[t] < q.$$

Aquí, la desigualtat estricta de la dreta és certa perquè  $v_i[t] \leq w_*[t] < q$ . Així doncs,  $v_i[t]$  és el residu de dividir el nombre de vots  $v_i[0]$  per la quota  $q$ . Si  $t = n$ , llavors no hi ha més escons per assignar i  $n_i = t_i$ . Si  $t < n$ , aleshores per a  $t \leq s < n$  cada escó és assignat a canvi del residu  $v_i[t]$  (la qual cosa només pot passar una vegada per a cada candidat). Per tant, aquests  $n - t$  escons són assignats als  $n - t$  candidats amb les restes majors  $v_i[t]$ .

Cas (b):  $w_*[n] \geq q$ . Com que  $w_*[s]$  no creix amb  $s$  (observació 1.2), , d'això se'n dedueix que  $w_*[s] \geq q$  per a tota  $s < n$ . A partir d'aquí, el lema 1.1 garanteix que  $w_*[n] \leq v[n] = q$ . I, combinant-ho amb la hipòtesi d'aquest cas (b), tenim, per tant,  $w_*[n] = q = v[n]$ . Això implica l'existència d'algun candidat  $j$  tal que  $v_j[n] = q$ , mentre que  $v_i[n] = 0$  per a  $i \neq j$ . Així doncs,  $j$  ha obtingut un escó menys que el nombre de quotes contingudes a  $v_j[0]$ . I qualsevol  $i \neq j$  ha obtingut tants escons com el nombre exacte de quotes contingudes a  $v_i[0]$  (ja que  $v_i[0] = v_i[n] + n_i q = n_i q$ ). Així doncs, els nombres inicials de vots dels diferents candidats eren tots ells múltiples enters

de  $q$ . Llevat del cas d'unanimitat total, això implica que el procés d'assignació d'escons s'ha trobat amb certes situacions d'empat que permeten transferir el dèficit d'un escó des de  $j$  a qualsevol altre candidat  $i$  amb un nombre positiu de vots, ben bé com en el mètode de les restes majors (amb la quota de Droop).□

## 2 Propietats de proporcionalitat

Segons Phragmén [31], «per al lector versat en matemàtiques, el caràcter proporcional de la regla proposada de reducció de la força dels vots hauria d'estar clar sense més explicació».

En el cas de llistes tancades (i disjunes), els vots classifiquen els electors de manera totalment paral·lela als candidats. Això permet comptar exactament quants electors hi ha de cada classe i plantejar-se si un repartiment determinat dels escons entre les diferents llistes és més o menys proporcional a la distribució de vots entre elles. Tindríem proporcionalitat exacta si els quocients dels nombres respectius (de vots i d'escons) fossin tots exactament iguals. Això difícilment es pot aconseguir, perquè estem parlant de números enters, però existeixen diversos algorismes —restes majors, D'Hondt, Sainte-Laguë— que busquen la manera d'acostar-se tant com es pugui (en un cert sentit que varia segons l'algorisme) a la proporcionalitat exacta.

Aquest plantejament no és possible en general en el cas de llistes obertes, ja que llavors no hi ha una classificació ben definida, ni de candidats ni d'electors. Dit això, tot seguit veurem que el mètode d'Eneström i Phragmén té la propietat següent: si alguns electors aproven exactament els mateixos candidats i el nombre de tals electors supera  $\ell$  vegades la quota, llavors aquest conjunt de candidats proporciona almenys  $\ell$  representants. O sigui, que en aquesta situació especial de vots exactament iguals, la quota actua realment com a constant de proporcionalitat entre vots i escons.

Aquesta propietat deixa d'estar garantida si els electors en qüestió aproven també altres candidats (a més dels que aproven en comú). Per exemple, en el cas

$$10 a b, \quad 10 a c, \quad 19 b, \quad 18 c, \quad n = 2,$$

el nombre d'electors que aproven el candidat  $a$  és 20, que supera la quota  $57/3 = 19$ ; tanmateix, el mètode d'Eneström i Phragmén no elegeix pas  $a$ , sinó  $b$  i  $c$ . Noteu, per cert, que aquesta elecció està donant representació a tots els electors, a diferència del cas d'elegir  $a$  i un altre candidat. Com veurem més avall, en situacions d'aquest tipus està garantit que si el nombre d'electors en qüestió supera  $\ell$  vegades la quota, llavors els representants elegits n'inclouen almenys  $\ell$  que es troben en la unió dels conjunts aprovats per aquells electors.

Recordem de l'apartat 1.1 que, donat un conjunt  $J$  de candidats,  $m_J$  és la seva capacitat, i  $v_J$  i  $y_J$  signifiquen, respectivament, el nombre de vots que aproven exactament el conjunt  $J$  i el nombre dels que aproven *almenys* el conjunt  $J$ . En relació amb això, usarem també la notació següent:

$$J^* = \bigcup \{A_k \mid k \text{ tal que } A_k \supseteq J\}.$$



Així doncs,  $i \in J^*$  si i només si  $i$  és aprovat per almenys un elector que també aprova tots els elements de  $J$ .

TEOREMA 2.1. *Per a qualsevol subconjunt  $J$  de candidats i qualsevol  $\ell \leq \min(n, m_J)$ , si  $v_J > \ell q$ , llavors  $n_J \geq \ell$ .*

TEOREMA 2.2 (vegeu també [35, p. 4-6]). *Per a qualsevol subconjunt  $J$  de candidats i qualsevol  $\ell \leq \min(n, m_J)$ , si  $\gamma_J > \ell q$ , llavors  $n_{J^*} \geq \ell$ .*

PREPARACIÓ PER A LES DEMOSTRACIONS. En lloc del número  $t$  de (8), aquí considerarem el següent:

$$p = \min\{s \mid w_*[s] \leq q\}. \quad (9)$$

Afirmem que  $p \leq n$ , és a dir,  $w_*[s] \leq q$  per a alguna  $s \leq n$ . En efecte, si suposem el contrari, és a dir,  $w_*[s] > q$  per a qualsevol  $s \leq n$ , el lema 1.1 permet deduir la desigualtat  $w_*[n] \leq q$ , que contradiu la hipòtesi de reducció a l'absurd.

Per a qualsevol subconjunt  $J$  de candidats, considerarem el nombre  $p_J$  de candidats de  $J$  que són elegits en els primers  $p$  passos del procediment, és a dir, per a  $s = 0 \dots p - 1$ . Òbviament,  $p_J \leq n_J$ . Per tant, per a establir els teoremes 2.1 i 2.2 bastarà demostrar respectivament les desigualtats  $p_J \geq \ell$  i  $p_{J^*} \geq \ell$ .

En les demostracions que segueixen limitem la nostra consideració a  $s = 0 \dots p - 1$ , valors per als quals està assegurat que  $w_*[s] > q$ . El candidat que és elegit en el pas  $s$  el denotarem amb  $i_*[s]$ .

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 2.1. Com que  $v_J = \sum_{A_k=J} v_k$ , quan  $i_*[s] \in J$ , l'equació (2) implica

$$v_J[s + 1] = \left(1 - \frac{q}{w_*[s]}\right) v_J[s] \geq v_J[s] - q,$$

on hem usat el fet que  $w_*[s] = w_{i_*[s]}[s] \geq v_J[s]$ . D'altra banda, quan  $i_*[s] \notin J$ , l'equació (4) implica que  $v_J[s + 1] = v_J[s]$ . Per tant, es compleix la desigualtat

$$v_J[p] \geq v_J - p_J q.$$

Suposem ara que es compleix la hipòtesi  $v_J > \ell q$  i també la negació de la conclusió, és a dir,  $p_J \leq \ell - 1$ . Com que estem suposant  $\ell \leq m_J$ , existeix algun candidat  $j \in J$  que segueix essent elegible després del pas  $p$ . Això permet escriure la cadena de desigualtats següent, en contradicció amb la definició de  $p$ :

$$w_*[p] \geq w_j[p] \geq v_J[p] \geq v_J - p_J q \geq v_J - (\ell - 1) q > q. \quad \square$$

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 2.2. Aquí estem considerant  $\gamma_J = \sum_{A_k \supseteq J} v_k$  i el conjunt  $J^* = \bigcup_{A_k \supseteq J} A_k$ . Un element de  $J^*$  no està contingut necessàriament en

tots aquests conjunts  $A_k$ . Tanmateix, quan  $i_*[s] \in J^*$ , les equacions (2) i (4) encara permeten deduir la desigualtat

$$\begin{aligned} \gamma_J[s+1] &= \sum_{\substack{A_k \ni J \\ k \sqrt{i_*}}} v_k[s+1] + \sum_{\substack{A_k \ni J \\ k \not\sqrt{i_*}}} v_k[s+1] = \\ &= \left(1 - \frac{q}{w_*[s]}\right) \sum_{\substack{A_k \ni J \\ k \sqrt{i_*}}} v_k[s] + \sum_{\substack{A_k \ni J \\ k \not\sqrt{i_*}}} v_k[s] \geq \gamma_J[s] - q, \end{aligned}$$

on hem usat el fet que  $w_*[s] = w_{i_*}[s] \geq \sum_{k \sqrt{i_*}, A_k \ni J} v_k[s]$ . D'altra banda, quan  $i_*[s] \notin J^*$ , l'equació (4) garanteix que  $\gamma_J[s+1] = \gamma_J[s]$ . Per tant,

$$\gamma_J[p] \geq \gamma_J - p_{J^*} q.$$

Anàlogament a la demostració del teorema 2.1, aquesta desigualtat, combinada amb les hipòtesis  $v_J > \ell q$  i  $p_{J^*} \leq \ell - 1$ , aquesta última essent la negació de la conclusió, contradueix la definició de  $p$ , ja que podem escriure la cadena de desigualtats següent, on  $j$  representa qualsevol element de  $J$  que segueix essent elegible després del pas  $p$  (tal element existeix per la hipòtesi  $\ell \leq m_j$ ):

$$w_*[p] \geq w_j[p] \geq \gamma_J[p] \geq \gamma_J - p_{J^*} q \geq \gamma_J - (\ell - 1) q > q. \quad \square$$

**OBSERVACIÓ 2.1.** Utilitzant (8) en lloc de (9), es pot tractar de manera similar la hipòtesi més feble  $v_J \geq \ell q$ , resp.  $\gamma_J \geq \ell q$ , per a demostrar que la desigualtat  $n_J \geq \ell$ , resp.  $n_{J^*} \geq \ell$ , només pot fallar en certs casos singulars que permeten diverses assignacions diferents (de l'estil que hem vist al final de la proposició 1.2). Fins i tot llavors, algunes d'aquestes assignacions compleixen la igualtat  $n_J = \ell$ , resp.  $n_{J^*} = \ell$ .

**OBSERVACIÓ 2.2.** En particular, en el cas de dos partits amb uns nombres de vots iguals respectivament a  $\ell q$  i  $(n+1-\ell)q$ , cal admetre la possibilitat que el primer partit no arribi a obtenir  $\ell$  representants (o el segon no arribi a obtenir-ne  $n+1-\ell$ ). Per tant, tenint en compte que  $q = v/(n+1)$ , el mètode d'Eneström i Phragmén compleix  $\sup\{v_J/v \mid n_J < \ell\} = \sup\{\gamma_J/v \mid n_{J^*} < \ell\} = \ell/(n+1)$ , on sup es refereix al que pot passar en una elecció arbitrària. En la notació de Janson [16]  $\pi_{\text{same}}(\ell, n) = \pi_{\text{JR}}(\ell, n) = \ell/(n+1)$ .

**COROLLARI 2.1 (MANTENIMENT DE LA MAJORIA).** Si  $n$  és senar (resp. parell),  $m_J \geq (n+1)/2$  (resp.  $m_J \geq n/2$ ) i  $v_J > v/2$  (resp.  $v_J \geq v/2$ ), llavors  $n_J > n/2$  (resp.  $n_J \geq n/2$ ). Anàlogament passa amb  $\gamma_J$  i  $n_{J^*}$  en lloc de  $v_J$  i  $n_J$ .

**DEMOSTRACIÓ.** Basta notar que la hipòtesi  $v_J > v/2$  (resp.  $v_J \geq v/2$ ) implica  $v_J > \ell q$  amb  $\ell = (n+1)/2 > n/2$  (resp.  $\ell = n/2$ ).  $\square$

**OBSERVACIÓ 2.3.** Aquesta propietat pot fallar quan s'usa la quota de Hare en lloc de la de Droop. Per exemple [18, p. 171] suposem que es tracta de

repartir 7 escons entre tres llistes  $A$ ,  $B_1$  i  $B_2$  que obtenen, respectivament, 900, 480 i 400 vots. La quota de Hare és  $1780/7 = 254.3$  i els quocients respectius són 3.539, 1.888 i 1.573, de manera que la regla de les restes majors acaba donant, respectivament, 3, 2 i 2 escons, sense majoria absoluta d'escons per a  $A$ , tot i que tenia majoria absoluta de vots. És més, les llistes  $B_1$  i  $B_2$  podrien correspondre a un mateix partit, que així aconseguiria un escó més que amb una sola llista  $B$  i 880 vots.

A finals del segle XIX això va portar diverses institucions suïsses a adoptar el mètode de les restes majors amb la quota de Droop i Hagenbach-Bischoff (vegeu [18, p. 171, 197, 276] i [19, apartat 3.2]).

OBSERVACIÓ 2.4. A canvi de la propietat precedent, no es pot evitar la possibilitat de tenir  $v_J < v/2$ , però  $n_J > n/2$ . Per exemple, per a  $n = 5$  els vots 56  $A$ , 34  $B$ , 30  $C$  donen com a resultat els escons 3  $A$ , 1  $B$ , 1  $C$ , on  $A$  té menys de la meitat dels vots però més de la meitat dels escons.

OBSERVACIÓ 2.5. Per al mètode d'optimització global de Thiele (vegeu l'apartat 5.2) s'ha demostrat que en les condicions del teorema 2.2 està garantida la propietat addicional següent [16, teorema 7.6]: Existeix un tipus  $k$  d'electors tal que  $A_k \supseteq J$  i  $A_k$  conté almenys  $\ell$  candidats elegits. Aquesta propietat no la compleix el mètode minímax iteratiu de Phragmén [16, exemple 7.4]. Ni tampoc no la compleix el mètode que estudiem aquí. Un contraexemple és el següent:

$$21 a b c_1, \quad 21 a b c_2, \quad 22 c_1 c_2 c_3, \quad 1 c_1 c_3, \quad 15 c_3, \quad n = 3.$$

Els escons són assignats a  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$ , en aquest ordre. Com es pot veure, la propietat esmentada falla per al conjunt  $J = \{a, b\}$ , per al qual  $y_J = 42 > 2q$ .

OBSERVACIÓ 2.6. La variant 1.3.1 no compleix el teorema 2.1. Un contraexemple és el següent:

$$95 A, \quad 79 B, \quad 75 C, \quad 7 AB, \quad 56 AC, \quad n = 3.$$

Com es pot comprovar, amb la variant esmentada el partit  $B$  no obté cap escó tot i que té més d'una quota.

OBSERVACIÓ 2.7. L'exemple següent, tret de [31, p. 14], mostra que el teorema 2.2 no es compleix si en lloc de la hipòtesi  $\ell \leq m_J$  es considera  $\ell \leq m_{J^*}$ :

$$120 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, \quad 86 b_1 b_2 b_3 b_4, \quad 24 a_2 a_3 a_4 a_5, \quad n = 7.$$

La quota és  $q = 230/8 = 28.75$ . Els escons són assignats a  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $b_1$ ,  $a_5$ ,  $b_2$  i  $b_3$ , en aquest ordre. Per a  $J = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$  es té  $J^* = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  i  $y_J = 144 > 5q$ . Tanmateix,  $n_{J^*} = 4 < 5$ .

### 3 Diferents tipus de monotonia, o la seva manca

Les propietats de monotonia consideren l'efecte de modificar alguns vots a favor d'un candidat determinat i demanen que aquest candidat no sigui perjudicat en el resultat.

### 3.1 Monotonia per a candidats individuals

**TEOREMA 3.1.** *Considerem una elecció amb candidats individuals i una modificació dels vots que consisteix només a afegir aprovacions a favor d'un candidat determinat, sense cap variació en les aprovacions que reben els altres candidats ni en el nombre total de vots ni en el nombre de representants a elegir. Si abans de la modificació s'assignava un escó a aquest candidat, llavors també se li assignarà un escó després de la modificació.*

**DEMOSTRACIÓ.** A continuació utilitzem una titlla per a referir-nos a les quantitats que corresponen a després de la modificació dels vots. Sigui  $i$  el candidat que obté aprovacions addicionals. Així doncs,  $\tilde{w}_i > w_i$ , mentre que  $\tilde{w}_j = w_j$  per a qualsevol  $j \neq i$ . Suposem que per als vots originals  $i$  és elegit quan  $s$  pren el valor  $t$ . Considerem ara els vots modificats. Afirmem que  $i$  és elegit per a algun  $s \leq t$ . Això és obvi en el cas  $t = 0$ , de manera que a partir d'ara considerarem  $t \geq 1$ . Suposem que no és elegit per a cap  $s \leq t - 1$  i vegem que llavors és elegit per a  $s = t$ . En efecte, la hipòtesi que estem fent implica, per inducció, els fets següents per a  $s \leq t$ :  $\tilde{w}_i[s] \geq w_i[s]$ ;  $\tilde{w}_j[s] = w_j[s]$  per a qualsevol  $j \in I[s] \setminus \{i\}$ ; els candidats elegits són els mateixos que amb els vots originals. Això dona el resultat desitjat, ja que  $\tilde{w}_i[t] \geq w_i[t] \geq w_j[t] = \tilde{w}_j[t]$  per a qualsevol  $j \in I[t] \setminus \{i\}$ .  $\square$

**OBSERVACIÓ 3.1.** No es pot prescindir de la hipòtesi que el nombre de vots es manté constant. Si les noves aprovacions eren abans vots buits i aquests no eren comptats en el nombre total de vots, llavors el candidat en qüestió pot deixar de ser elegit a causa de l'augment que experimenta la quota. Per exemple, l'elecció de tres representants amb els vots

$$8b, 7ab, 4c, 9bc, 9ad, 1bd, 3acd, 8bcd$$

dona els tres escons successivament a  $b, c, a$ . I amb un vot addicional que aprova només  $a$ , llavors resulten elegits successivament  $b, d, c$ .

**OBSERVACIÓ 3.2.** En el cas d'empats pot passar que tant els vots originals com els modificats admetin una assignació en què el candidat en qüestió és elegit i una altra en què no. En aquest cas, depenent de quina assignació és escollida abans i després de la modificació, pot fer la sensació errònia d'una manca de monotonia.

**OBSERVACIÓ 3.3.** El teorema 3.1 no val per a la variant 1.3.6, que permet que el nombre de vots arribi a prendre valors negatius. Un exemple el dona l'elecció de dos representants amb els vots següents:

$$7a, 3b, 2c, 1d_i \quad (i = 1 \dots 18).$$

La quota és  $q = 10$ . Com es pot comprovar, la variant 1.3.6 determina l'elecció de  $a$  i  $b$ . Tanmateix, si tres dels vots que només aproven  $a$  passen a aprovar també  $b$ , llavors resulten elegits  $a$  i  $c$ .

### 3.2 Manca de monotonia per a candidatures collectives

Considerem ara la situació anàloga en què els candidats són llistes de partit en lloc de candidats individuals. Suposem que hi ha una llista que és afegida en alguns vots que abans no la incloïen (mentre que les altres llistes mantenen exactament les mateixes aprovacions que abans). En aquesta situació s'esperaria que el partit en qüestió mantingués almenys el mateix nombre d'escons. Però no sempre és així.

Considerem, per exemple, el cas següent:

$$5 A, \quad 4 B, \quad 6 AC, \quad 4 BC, \quad n = 3.$$

Com es pot comprovar, el procediment d'Eneström-Phragmén assigna els escons successivament a  $A$ ,  $B$  i  $A$ . Però si un dels vots que ara aproven només  $B$  es modifica i aprova també  $A$ , llavors els escons són assignats successivament a  $A$ ,  $C$  i  $B$ .

L'exemple següent il·lustra un fenomen del mateix tipus que en l'observació 3.1 de més amunt (on canvia el nombre de vots, i, per tant, la quota):

$$5 A, \quad 3 B, \quad 3 AB, \quad 8 AC, \quad 7 BC, \quad n = 3.$$

Com es pot comprovar, els escons són assignats successivament a  $A$ ,  $B$  i  $A$ . Suposem ara que els vots que només aproven  $A$  augmenten en una unitat. Després d'aquesta modificació, els escons són assignats successivament a  $A$ ,  $C$  i  $B$ .

Aquests fenòmens poden ser justificats argumentant que el procediment d'Eneström i Phragmén només busca que el conjunt de representants estigui ben repartit entre els electors. Com que els vots només expressen aprovació, no importa si un elector és representat per un candidat o per un altre, sempre que ambdós candidats tinguin l'aprovació d'aquell elector.

### 3.3 Manca de monotonia respecte a la mida de la cambra

D'altra banda, el procediment està adreçat a un valor concret del nombre total d'escons, el qual determina la quota. No és cap sorpresa, doncs, que el pas de  $n$  a  $n + 1$  escons no sempre consisteixi simplement en afegir un candidat. Així, l'exemple 1.1 amb  $n = 3$  dona com a resultat l'elecció successiva de  $a$ ,  $u$  i  $x$ . En canvi, els mateixos vots amb  $n = 4$  donen com a resultat l'elecció successiva de  $a$ ,  $u$ ,  $b$  i  $z$ .

## 4 Comportament asimptòtic quan $n \rightarrow \infty$ en el cas de dos partits

En aquesta secció suposem que només hi ha dos partits,  $A$  i  $B$  —per tant, cada elector aprova o bé  $A$  o bé  $B$  o tots dos partits— i ens preguntem pel comportament asimptòtic de  $n_A/n$  i  $n_B/n$  quan  $n \rightarrow \infty$  i la seva dependència

respecte al nombre de vots de cada tipus,  $v_A, v_B, v_{AB}$ . Com que els electors que aproven tant  $A$  com  $B$  són indiferents entre totes les proporcions d'escons entre  $A$  i  $B$ , el comportament ideal és reproduir la proporció entre  $v_A$  i  $v_B$ , és a dir, tenir  $\lim_{n \rightarrow \infty} n_A/n = v_A/(v_A + v_B)$ .

Mora i Oliver ([22]) van observar que el mètode minimax iteratiu de Phragmén es desvia d'aquest comportament ideal. De fet, la dependència de  $\lim_{n \rightarrow \infty} n_A/n$  respecte a  $v_A, v_B, v_{AB}$  té un caràcter similar a la funció de Cantor. Aquest fenomen ha estat analitzat matemàticament per Janson i Öberg [17]. En aquesta secció veurem que el mètode d'Eneström i Phragmén es comporta millor.

Usarem la notació següent:

$$\alpha[s] = v_A[s]/v, \quad \beta[s] = v_B[s]/v, \quad \zeta[s] = v_{AB}[s]/v;$$

$$\rho = q/v = 1/(n+1).$$

Per a  $\alpha[0] = \beta[0] = 0$  es veu fàcilment que el procediment permet qualsevol distribució d'escons entre  $A$  i  $B$ . Per a  $\alpha[0] = 0 < \beta[0]$  —resp.  $\beta[0] = 0 < \alpha[0]$ — també es veu fàcilment que tots els escons es donen a  $B$  —resp.  $A$ . Per tant, a partir d'ara suposarem  $\alpha[0], \beta[0] > 0$ . Pel que fa a  $\zeta[0]$ , de vegades tractarem separatament els casos  $\zeta[0] > 0$  i  $\zeta[0] = 0$  (aquest últim ha estat considerat a l'apartat 1.4).

En comptes de  $\alpha[s], \alpha[s+1], \alpha[s+2]$ , a continuació escriurem  $\alpha, \alpha', \alpha''$ , i similarment amb  $\beta$  i  $\zeta$ . Com mostra el lema següent, sempre som en el cas  $w_*[s] > q$  i, per tant, les assignacions d'escons gasten sempre una quota sencera. Més concretament, per a  $s \leq n-1$  els valors de  $(\alpha', \beta', \gamma')$  romanen positius i estan relacionats amb  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de la manera següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \left(1 - \frac{\rho}{\alpha + \zeta}\right) \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \zeta' = \left(1 - \frac{\rho}{\alpha + \zeta}\right) \zeta, \quad \text{si } \alpha > \beta; \\ \alpha' = \alpha, \quad \beta' = \left(1 - \frac{\rho}{\beta + \zeta}\right) \beta, \quad \zeta' = \left(1 - \frac{\rho}{\beta + \zeta}\right) \zeta, \quad \text{si } \alpha < \beta. \end{array} \right. \quad (10)$$

En el primer cas, l'escó ha estat assignat a  $A$  i en el segon a  $B$ . Per a  $\alpha = \beta$  es permeten les dues possibilitats.

LEMA 4.1. *Suposem que  $\zeta[0] > 0$ . Llavors es compleixen els fets següents:*

$$\max(\alpha + \zeta, \beta + \zeta) > \rho \quad \forall s \leq n-1, \quad (11)$$

$$(\alpha', \beta', \gamma') \text{ estan relacionades amb } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ per (10)} \quad \forall s \leq n-1, \quad (12)$$

$$\alpha + \beta + \zeta = 1 - s\rho = (n+1-s)\rho \quad \forall s \leq n, \quad (13)$$

$$\alpha, \beta, \zeta > 0 \quad \forall s \leq n. \quad (14)$$

DEMOSTRACIÓ. Per a  $s = 0$ , (13) es compleix per la definició de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\zeta$ , i la desigualtat (14) és certa per hipòtesi. Encara per a  $s = 0$ , (11) es compleix perquè altrament tindríem  $\alpha + \zeta \leq \rho$  i  $\beta + \zeta \leq \rho$ , d'on es deduiria que  $\alpha + \beta + \zeta < \alpha + \beta + 2\zeta \leq 2\rho$ , és a dir,  $(n + 1)\rho < 2\rho$ , i, per tant,  $n < 1$ .

D'altra banda, per a qualsevol  $s$  es comprova fàcilment que (11) implica (10) i que els valors resultants de  $(\alpha', \beta', \gamma')$  satisfan (13) (amb  $s$  substituïda per  $s + 1$ ) i (14).

Per tant, només resta demostrar que (11) es manté vàlida per a  $s \leq n - 1$ . Sigui  $s$  l'última vegada que es compleix (11) i suposem que fos  $s \leq n - 2$ . Tal com acabem de veure en el paràgraf precedent, això implica  $\alpha' + \beta' + \zeta' = (n - s)\rho$  i  $\alpha', \beta', \zeta' > 0$ . Però estem suposant que  $\max(\alpha' + \zeta', \beta' + \zeta') \leq \rho$ . Sense pèrdua de generalitat, podem suposar també que  $\max(\alpha' + \zeta', \beta' + \zeta') = \alpha' + \zeta'$ . Combinant aquests fets amb el valor conegut  $\alpha' + \beta' + \zeta' = (n - s)\rho$ , s'obté que  $\beta' = (n - s)\rho - (\alpha' + \zeta') \geq (n - s - 1)\rho \geq \rho$ , on hem utilitzat la hipòtesi que  $s \leq n - 2$ . Tenint en compte que  $\zeta' > 0$ , se segueix que  $\beta' + \zeta' > \rho$ , en contradicció amb la hipòtesi anterior  $\max(\alpha' + \zeta', \beta' + \zeta') \leq \rho$ .  $\square$

LEMA 4.2. *Suposem que  $\zeta[0] > 0$ . Si l'escó  $s + 1$  s'assigna a  $A$  i l'escó  $s + 2$  s'assigna a  $B$ , aleshores l'escó  $s + 3$  s'assigna necessàriament a  $A$  (sempre que  $s + 3 \leq n$ ). Anàlogament si intercanviem  $A$  i  $B$ .*

DEMOSTRACIÓ. Assignar l'escó  $s + 1$  a  $A$  i l'escó  $s + 2$  a  $B$  implica les igualtats

$$\alpha' = \left(1 - \frac{\rho}{\alpha + \zeta}\right) \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \zeta' = \left(1 - \frac{\rho}{\alpha + \zeta}\right) \zeta;$$

$$\alpha'' = \alpha', \quad \beta'' = \left(1 - \frac{\rho}{\beta' + \zeta'}\right) \beta', \quad \zeta'' = \left(1 - \frac{\rho}{\beta' + \zeta'}\right) \zeta',$$

i també les desigualtats  $\alpha/\beta \geq 1$  (i  $\alpha'/\beta' \leq 1$ ). Haurem acabat si demostrem que  $\alpha''/\beta'' > \alpha/\beta$  (que implica  $\alpha''/\beta'' > 1$ ). Com que

$$\frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{1}{(1 - \rho/(\beta' + \zeta'))} \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{(1 - \rho/(\alpha + \zeta))}{(1 - \rho/(\beta' + \zeta'))} \frac{\alpha}{\beta},$$

n'hi ha prou amb veure que  $\frac{(1 - \rho/(\alpha + \zeta))}{(1 - \rho/(\beta' + \zeta'))} > 1$ . Però això equival a la desigualtat

$$\beta' + \zeta' < \alpha + \zeta,$$

és a dir,

$$\beta + \left(1 - \frac{\rho}{\alpha + \zeta}\right) \zeta < \alpha + \zeta,$$

la qual cosa es compleix perquè  $\beta \leq \alpha$  i  $\zeta > 0$  (per (14)).  $\square$

OBSERVACIÓ 4.1. Els càlculs precedents mostren que si  $\alpha/\beta = 1$  i l'escó  $s + 1$  és assignat a  $A$ , llavors  $\alpha'/\beta' = (1 - \rho/(\alpha + \zeta)) \alpha/\beta < 1$  i l'escó  $s + 2$  és assignat necessàriament a  $B$  (suposant que  $s + 2 \leq n$ ). A més,  $\alpha''/\beta'' > \alpha/\beta = 1$  i l'escó  $s + 3$  és assignat necessàriament a  $A$  (suposant que  $s + 3 \leq n$ ). Continuant amb el mateix argument,  $\alpha'''/\beta''' < 1$ ,  $\alpha''''/\beta'''' > 1$ , etcètera. Així doncs, en el cas  $\zeta[0] > 0$  un empat de la forma  $\alpha/\beta = 1$  només pot ocórrer una sola vegada.

LEMA 4.3. *Suposem que  $\zeta[0] = 0$  i que l'escó  $s + 1$  és objecte d'un empat, és a dir,  $\alpha = \beta$ . Si aquest escó és assignat a  $A$ , llavors l'escó  $s + 2$  és assignat a  $B$  (suposant que  $s + 2 \leq n$ ) i l'escó  $s + 3$  torna a ser objecte d'un empat (suposant que  $s + 3 \leq n$ ). Anàlogament si intercanviem  $A$  i  $B$ .*

DEMOSTRACIÓ. N'hi ha prou amb comprovar que  $\alpha'/\beta' = (\alpha - \rho)/\beta < 1$  i que  $\alpha''/\beta'' = (\alpha - \rho)/(\beta - \rho) = 1$ . L'únic problema podria ser que tinguéssim  $\alpha = \rho$  i  $\beta = \rho$ , però això implica que tots els escons anteriors s'han donat a canvi d'una quota sencera  $\rho$ ; tenint en compte que  $(n + 1)\rho = 1$  i que  $\alpha + \beta = 2\rho$ , se'n dedueix que en aquest moment ja hem assignat  $n - 1$  escons, de manera que l'escó  $s + 1$  és l'últim.  $\square$

Tant en el cas  $\zeta[0] > 0$  com en el cas  $\zeta[0] = 0$  els fets precedents tenen la conseqüència següent:

PROPOSICIÓ 4.1. *Sigui  $k$  el màxim enter no negatiu tal que els  $k$  primers escons són assignats tots ells al mateix partit sense empats (si  $\alpha = \beta$ , llavors  $k = 0$ ). Aleshores, els  $n - k$  escons restants es reparteixen o bé per igual, o bé amb un escó de diferència entre els dos partits.*

El nostre objectiu és ara calcular els límits de  $n_A/n$  i  $n_B/n$  quan  $n \rightarrow \infty$ . El resultat serà el següent:

PROPOSICIÓ 4.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \zeta)}{\alpha} \right), \quad \text{per a } \alpha \geq \beta, \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \zeta)}{\beta} \right), \quad \text{per a } \alpha \leq \beta. \quad (16)$$

DEMOSTRACIÓ. El càlcul d'aquests límits passarà per estimar el valor de l'enter  $k$  que es defineix en la proposició 4.1. A continuació suposarem que el primer escó és assignat a  $A$ .

En la resta d'aquesta secció tornem a utilitzar la notació  $\alpha[s]$ ,  $\beta[s]$ ,  $\zeta[s]$  per a significar els valors en el pas  $s$ , i  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\zeta$  tornen a significar els valors inicials (que compleixen  $\alpha + \beta + \zeta = 1$ ). La hipòtesi que el primer escó és assignat a  $A$  implica que  $\alpha \geq \beta$ .

D'acord amb la seva definició,  $k$  és el primer enter tal que  $\alpha[k] \leq \beta[k]$ . El seu valor es pot calcular de la manera següent. Per començar, del fet que els primers  $k$  escons siguin assignats tots ells a  $A$  se'n dedueix que

$$\alpha[k] + \zeta[k] = \alpha + \zeta - k\rho. \quad (17)$$



Cadascun d'aquests escons ha comportat un factor de reducció que afecta tant els vots que només aproven  $A$  com els que aproven ambdós partits. D'això se'n dedueix que

$$\frac{\alpha[k]}{\alpha} = \frac{\alpha[k] + \zeta[k]}{\alpha + \zeta}. \quad (18)$$

Combinant (17) i (18) s'obté que

$$\alpha[k] = \left(1 - \frac{k\rho}{\alpha + \zeta}\right) \alpha.$$

D'altra banda, sabem que  $\beta[k] = \beta$ . Aquestes igualtats permeten determinar el primer enter  $k$  que compleix  $\alpha[k] \leq \beta[k]$ , a saber,

$$k = \left\lceil \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \zeta)}{\alpha\rho} \right\rceil,$$

on  $\lceil x \rceil$  significa el més petit dels enters superiors o iguals a  $x$ . Com que  $\rho = 1/(n + 1)$ , obtenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \zeta)}{\alpha}.$$

Finalment, només resta tenir en compte que  $k$  està relacionat amb  $n_A$  de la manera següent:  $n_A = k + (n - k)/2$  per a  $n - k$  parell,  $n_A = k + (n - k \pm 1)/2$  per a  $n - k$  senar (el signe «+» es dona en el cas d'empats). D'aquests fets se'n dedueix (15). La restricció  $\alpha \geq \beta$  que apareix a (15) correspon a la hipòtesi de més amunt que els primers escons van a parar a  $A$ . En el cas contrari, la fórmula anàloga per a  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_B/n)$  porta a (16).  $\square$

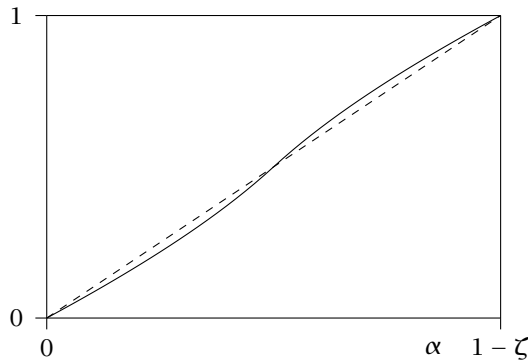


FIGURA 2: Dependència de  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_A/n)$  respecte a  $\alpha$  per a  $\zeta = 0.376$ .

En particular, (15) i (16) coincideixen a donar  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_A/n) = 1/2$  per a  $\alpha = \beta$ . D'altra banda, per a  $\zeta = 0$  ambdues fórmules es redueixen a  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_A/n) = \alpha$  (ja que  $\alpha + \beta = 1$ ).

La figura 2 mostra la dependència del límit respecte  $\alpha$  per a un valor fixat de  $\zeta$  (aleshores  $\beta = 1 - \zeta - \alpha$ ).

## 5 Comparació amb altres mètodes

En aquesta secció les propietats precedents del mètode d'Eneström i Phragmén són comparades amb les dels principals mètodes alternatius per a eleccions parlamentàries mitjançant el vot d'aprovació. En particular, considerarem tant el mètode minimax iteratiu de Phragmén [25, 26, 27, 29] com els mètodes de Thiele [38], els quals són tots ells extensions de la regla de D'Hondt al cas de llistes obertes. També ens referirem a l'anomenat *mètode de parts iguals* [23], el qual té certs punts en comú amb el d'Eneström i Phragmén, però en realitat és prou diferent. Finalment, tot i que no utilitza el vot d'aprovació sinó el vot preferencial, considerarem també el mètode de Borda harmònic, que en el seu moment Finlàndia va preferir al mètode d'Eneström i Phragmén.

### 5.1 El mètode minimax de Phragmén

El mètode minimax de Phragmén considera que cada representant, és a dir, cada candidat electe, es reparteix entre els «seus» electors, és a dir, els que l'han aprovat. Idealment es tractaria que aquest repartiment, no necessàriament uniforme, minimitzés la desigualtat entre electors pel que fa al total de representació obtinguda per cadascun d'ells. Més concretament, aquí Phragmén pretenia minimitzar la màxima representació obtinguda per un elector. En el cas general de les llistes obertes, aquesta optimització no és fàcil de calcular. És per aquest motiu que, en lloc d'això, Phragmén va proposar un procediment seqüencial «voraç» en què a cada pas es busca un representant addicional que minimitzi aquesta representació màxima.

Aquest criteri de mínima desigualtat de representació entre electors està relacionat amb la noció de representació proporcional. Encara que no parteix de cap quota, resulta que el mètode minimax iteratiu de Phragmén satisfà també els teoremes 2.1 i 2.2 amb  $q = v/(n + 1)$ . Dit de manera equivalent, assoleix els valors òptims dels índexs  $\pi_{\text{same}}$  i  $\pi_{\text{PJR}}$  de [16, apartat 7.2] (vegeu també [14, sats 13.5.(ii)]).

Pel que fa a la monotonia, el mètode minimax iteratiu de Phragmén es comporta com el d'Eneström i Phragmén: la monotonia per a candidats individuals es manté [22, proposició 7.10] i la monotonia per a llistes de partit falla [22, apartat 7.5]. La monotonia respecte a la mida del parlament és certament una altra qüestió, ja que el mètode minimax iteratiu de Phragmén compleix aquesta propietat per construcció.

D'altra banda, pel que fa al comportament asimptòtic en el cas de dos partits, el mètode minimax iteratiu de Phragmén presenta un comportament especial en què, per exemple, la corba suau de la figura 2 se substitueix per una funció similar a la de Cantor en què cada valor racional és la imatge d'un interval de mesura positiva (vegeu [22, apartat 7.7] i [17, apartat 11.4]). A més del caràcter singular, el mètode minimax iteratiu també és pitjor que el d'Eneström-Phragmén en la magnitud de les desviacions respecte al comportament ideal (vegeu la figura 3 de [22]).

## 5.2 Els mètodes de Thiele

Els mètodes de Thiele ([38]) pretenen maximitzar la satisfacció total dels electors. En relació amb això, es postula que la satisfacció  $\sigma$  d'un elector només depèn del nombre  $h$  de candidats electes que han estat aprovats per aquest elector; aquesta dependència se suposa no decreixent amb  $\sigma(0) = 0$  i  $\sigma(1) = 1$ .

Més concretament, Thiele va prestar atenció especial al cas en què aquesta dependència té la forma següent:

$$\sigma(h) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h}, \quad \text{amb } \sigma(0) = 0.$$

Com es pot veure fàcilment, aquesta funció té la propietat que, en el cas de les llistes de partit, el criteri de maximització de la satisfacció total condueix a la regla de D'Hondt.

Com a l'apartat 5.1, la complexitat computacional del cas general de les llistes obertes va portar Thiele a substituir el criteri d'optimització original per certes versions seqüencials voraces, que es coneixen, respectivament, com a *mètodes d'addició i d'eliminació de Thiele*.

**5.2.1 Mètode d'addició de Thiele.** En aquest cas es comença amb el conjunt buit i cada pas busca un representant addicional que produeixi un increment màxim de satisfacció.

Si el comparem amb el mètode d'Eneström i Phragmén, convé assenyalar que el mètode d'addició de Thiele també es pot veure en termes d'una reducció progressiva del valor de cada vot cada vegada que s'utilitza per a triar un nou candidat. De fet, suposa l'esquema de reducció següent: una papereta es redueix a  $1/2$  del seu valor quan s'utilitza per primera vegada per a elegir un dels seus candidats. Quan s'escull un segon candidat d'una papereta, el valor d'aquesta papereta es redueix a  $1/3$  del seu valor inicial, o equivalentment, a  $2/3$  del seu valor anterior. De la mateixa manera, quan s'escull un tercer candidat d'una papereta, el valor d'aquesta papereta es redueix a  $1/4$  del seu valor inicial, o equivalentment, a  $3/4$  del seu valor anterior. I així successivament.

Això té una certa similitud amb el mètode que hem estat discutint, especialment la seva variació de «fraccions simples» (apartat 1.3.1). Tanmateix, els factors de reducció del mètode de Thiele no tenen res a veure amb el nombre de paperetes que van donar suport al candidat elegit, i molt menys amb comparar aquest nombre amb qualsevol quota prefixada. Per tant, aquesta semblança és només superficial. En paraules de Phragmén [30, p. 4], la regla d'addició de Thiele «és una generalització purament formal de la regla de D'Hondt i, per tant, no té una justificació genuïna».

En particular, les propietats de proporcionalitat com els teoremes 2.1 i 2.2 deixen de tenir lloc quan els vots s'allunyen del cas de llistes de partits disjunts. Considerem, per exemple, el cas següent, degut a [37]:

$$1 a, \quad 9 a b, \quad 9 a c, \quad 9 b, \quad 9 c, \quad 13 k l m, \quad (19)$$

el qual compararem amb

$$37 a b c, \quad 13 k l m. \quad (20)$$

Suposem que  $n = 3$ . La quota és  $q = 50/4 = 12.5$ . Així doncs, les hipòtesis del teorema 2.1 es compleixen amb  $J = \{k, l, m\}$  i  $\ell = 1$ . Si aquest teorema fos cert, hauríem de tenir  $n_J \geq 1$ . Això es compleix en el cas de (20), on  $a, b$  i  $k$  resulten elegits en aquest ordre (com en la regla de D'Hondt). Tanmateix, en el cas de (19), el mètode d'addició de Thiele elegeix successivament  $a, b$  i  $c$  (mentre que el mètode d'Eneström i Phragmén elegeix successivament  $a, k$  i  $b$ ). Vist això, podem imaginar que (20) són vots sincers i que (19) és una estratègia que permet al partit  $abc$  aconseguir els tres escons. En el marc de [16], el fet que el mètode d'addició de Thiele no compleix els teoremes 2.1 i 2.2 es tradueix en el fet que els seus valors de  $\pi_{\text{same}}(\ell, n)$  i  $\pi_{\text{PJR}}(\ell, n)$  són superiors al valor òptim  $\ell/(n+1)$  (vegeu [16, apartat 7.4]).

Pel que fa a la monotonia, el mètode d'addició de Thiele es comporta exactament com el minimax iteratiu de Phragmén: la monotonia per a candidats individuals es manté [15, teorema 14.2], la monotonia de les llistes de partit falla i la monotonia respecte a la mida del parlament es manté per construcció.

Finalment, pel que fa al comportament asimptòtic en el cas de dos partits, el mètode d'addició de Thiele compleix el límit ideal  $\lim_{n \rightarrow \infty} n_A/n = \alpha/(\alpha + \beta) = \alpha/(1 - \zeta)$  [17, exemple 12.10].

**5.2.2 Mètode d'eliminació de Thiele.** A diferència del procediment d'addició, aquí es comença amb el conjunt de tots els candidats i cada pas busca quin d'ells s'ha d'eliminar per a obtenir un mínim decrement de satisfacció.

Aquest procediment compleix el teorema 2.1 però no el 2.2 [16, apartat 7.5]. En el cas particular de (19), resulten eliminats successivament  $m, l$  i  $a$ , de manera que romanen elegits  $b, c$  i  $k$  (per cert, aquest conjunt optimitza també el criteri de Thiele de manera global, no només seqüencial). Aquest resultat concorda amb el teorema 2.1, que concedeix un escó al conjunt  $J = \{k, l, m\}$ . Tanmateix, també és cert que aquest conjunt de candidats electes no inclou el més votat, és a dir,  $a$ . Aquest fet es pot veure com un defecte important d'aquest mètode (punt de vista que va ser adoptat per Phragmén [29, p. 301-302]). Un altre defecte d'aquest procediment és que incompleix fins i tot la propietat de la monotonia per als candidats individuals.

També cal notar que els experiments computacionals sobre el comportament asimptòtic en el cas de dos partits indiquen que el mètode d'eliminació de Thiele compleix el comportament límit ideal  $\lim_{n \rightarrow \infty} n_A/n = \alpha/(\alpha + \beta) = \alpha/(1 - \zeta)$ .

De totes maneres, el procediment d'eliminació no és gaire adequat en el cas que els elements que s'aproven o no siguin partits. En efecte, en aquest cas, aquest procediment ha de començar per tenir en compte quants candidats s'inclouen en una llista de partit, quan aquesta xifra hauria de ser irrellevant.

### 5.3 El mètode de parts iguals

Recentment s'ha proposat [23] (vegeu també [20]) un nou mètode que té bastants punts en comú amb el mètode d'Eneström i Phragmén. Els seus autors l'anomenen *mètode de parts iguals* (*equal shares* en anglès; inicialment en deien *rule X*).

Tal com el mètode d'Eneström-Phragmén, el de parts iguals és un procediment seqüencial en què cada representant és elegit a canvi d'un cert nombre de vots i els vots van essent descomptats a mesura que s'utilitzen. Com a Eneström-Phragmén, el primer que es fa és fixar la quota, és a dir, el nombre de vots que es bescanviaran per un escó; en relació amb això, la versió original utilitza la quota de Hare, però també seria raonable fer servir la quota de Droop. Encara en comú amb Eneström-Phragmén, no està assegurat que aquest preu pugui ser mantingut per a tots els escons, sinó que en general pot ser necessària una «liquidació» final amb «rebaixes».

A diferència d'Eneström-Phragmén, però, el procediment ideal sense rebaixes no té una generalització òbvia a l'escenari de rebaixes, de manera que o bé s'atura el procediment, sense haver completat el nombre desitjat de representants, o bé se segueix amb un altre mètode (típicament el mètode minimax de Phragmén). Dit això, la diferència principal entre el mètode d'Eneström-Phragmén i el de parts iguals es troba ja en cada pas del procediment ideal sense rebaixes; concretament, radica en la manera de triar un candidat com a representant i de repartir la quota entre els vots que l'aproven: així com el mètode d'Eneström-Phragmén multiplica aquests vots per un mateix factor  $\leq 1$ , el de parts iguals resta una mateixa quantitat a tots els electors que hi arriben (a aquesta quantitat) i deixa a zero els altres.

Més concretament, per a passar del mètode d'Eneström-Phragmén al de parts iguals basta situar-se en l'escenari que  $k$  indexa electors individuals en lloc de tipus d'electors (de manera que  $v_k[0] = 1$  per a qualsevol  $k$ ) i fer els dos canvis següents: (a) Redefinir  $w_i$  com a  $w_i = q/\rho_i$ , on  $\rho_i$  és la solució de l'equació

$$\sum_{k \leq i} \min(\rho_i, v_k) = q; \tag{21}$$

si  $\sum_{k \leq i} v_k < q$ , llavors aquesta equació no té solució, i en aquest cas posem  $w_i = 0$ . I (b) canviar l'equació (2) per

$$v_k[s + 1] = v_k[s] - \min(\rho_*, v_k[s]), \tag{22}$$

on  $\rho_* = \min_i \rho_i$ .

Si a les equacions (21) i (22) canviem  $\min(x, y)$  per  $xy$ , llavors tenim exactament el mètode d'Eneström i Phragmén.

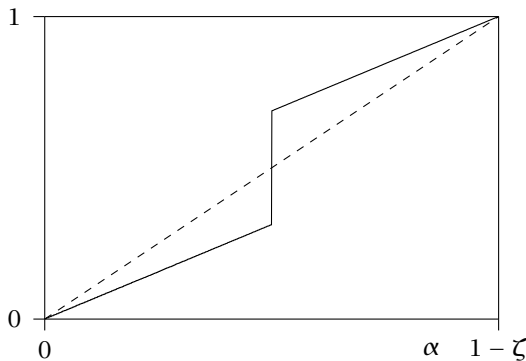


FIGURA 3: Dependència de  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_A/n)$  respecte a  $\alpha$  per a  $\zeta = 0.376$  en el mètode de parts iguals. Compareu aquesta figura amb la figura 2.

Les propietats del mètode de parts iguals han estat estudiades a [23] i són discutides a [20] (vegeu-ne les taules 3.1 i 4.1). Aquí només afegirem que el comportament asimptòtic en el cas de dos partits es desvia força del comportament ideal. En efecte, els experiments computacionals mostren que, en lloc del valor  $\alpha/(\alpha+\beta)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n_A/n$  és igual a  $\alpha$  per a  $\alpha < (1-\zeta)/2$ , mentre que és igual a  $1-\beta$  per a  $\alpha > (1-\zeta)/2$ , amb un salt de mida  $\zeta = 1-\alpha-\beta$  quan  $\alpha$  travessa el valor  $(1-\zeta)/2$  (i  $\beta$  travessa el mateix valor en sentit contrari).

#### 5.4 Taula de comparació

La taula 1 resumeix els resultats anteriors per als mètodes que consideren el vot d'aprovació. A la columna «Tipus» indiquem el comportament en cas de votació uninominal en termes de llistes de partit: «Dr» significa les restes majors amb la quota de Droop, i «D'H» significa la regla de D'Hondt. Les columnes «Tma. 2.1» i «Tma. 2.2» indiquen si aquests teoremes es compleixen o no. A la columna «Mono», el valor «ind» significa que la monotonia s'aplica als candidats individuals, però no a les llistes de partits (vegeu la secció 3), mentre que «×» significa que la monotonia falla fins i tot per a candidats individuals. La columna «2Lim» es refereix al comportament asimptòtic en el cas de dos partits; aquí el valor «√» significa que el límit és la fracció ideal  $\alpha/(\alpha+\beta)$ , el valor «×» està motivat pel fenomen de la funció de Cantor en el mètode minimax iteratiu de Phragmén i el valor «~» significa una funció suau no tan diferent de la ideal. Finalment, la columna «Simpl» intenta categoritzar en dos nivells la simplicitat del mètode per a un públic ampli: «~» - acceptable, i «×» - una mica complex. En el cas del mètode de parts iguals, ens limitem a les propietats que no depenen del procediment utilitzat en la fase de rebaixes.

	Tipus	Tma. 2.1	Tma. 2.2	Mono	2Lim	Simpl
<i>Eneström-Phragmén</i>	Dr	√	√	ind	~	~
<i>Phragmén, minimax</i>	D'H	√	√	ind	×	×
<i>Thiele, addició</i>	D'H	×	×	ind	√	~
<i>Thiele, eliminació</i>	D'H	√	×	×	√	×
<i>Parts iguals</i>		√	√	ind	×	×

TAULA 1: Comparació de diferents mètodes electorals basats en el vot d'aprovació.

#### 5.5 El mètode de Borda harmònic

Tot i que no utilitza el vot d'aprovació sinó el vot preferencial, a continuació comentem breument el mètode que Finlàndia va adoptar el 1907 en lloc d'altres propostes, una de les quals era el mètode d'Eneström i Phragmén. Aquest

mètode consisteix en el següent: cada butlleta compta com 1 vot per al candidat que hi figura en primer lloc,  $1/2$  vot per al segon,  $1/3$  per al tercer, etcètera. Per a cada candidat se sumen els vots i fraccions de vot que obté en totes les butlletes. Fet això, s'elegeixen com a representants els candidats que totalitzen més vots comptats d'aquesta manera. En el cas particular de llistes tancades, aquest algorisme equival a la regla de D'Hondt [6]. Tanmateix, la versió general que acabem de descriure per a llistes obertes (ordenades) ja havia estat considerada bastant abans (vegeu [10, p. 21, 54–55], [4], [11, apèndix C] i [9]).<sup>1</sup> Seguint Janson [14, 16], l'anomenem *mètode de Borda harmònic*.

En el cas que ara estem considerant de llistes ordenades és desitjable la propietat següent, similar al teorema 2.1 (vegeu [16]): suposem que hi ha  $u$  electors que voten exactament la mateixa llista ordenada; si  $u > \ell q$  i la llista inclou  $\ell$  candidats o més, llavors resulten elegits almenys  $\ell$  candidats d'aquesta llista. El mètode de Borda harmònic no compleix pas aquesta propietat. Com a exemple poden servir els vots (19), on entenem que l'ordre de preferència entre candidats en cada vot és l'ordre en què apareixen escrits d'esquerra a dreta. Com es pot comprovar, el recompte de Borda harmònic dona com a resultat els nombres de vots següents:  $a$  19,  $b$  13.5,  $c$  13.5,  $k$  13,  $l$  6.5,  $m$  4.33, de manera que els 13 últims electors no obtenen cap representant tot i que superen una quota  $q = 12.5$ .

De la seva definició se'n dedueix immediatament que aquest mètode gaudeix de la —en principi desitjable— propietat de monotonia: un candidat no pot deixar de ser elegit si és afegit o puja de posició en un o més vots.

Tanmateix, pot ser que llavors deixi de ser elegit un altre candidat que figura més amunt en aquests vots. Per exemple, si  $n = 1$  i els vots són 60  $a$ , 40  $b$ , llavors surt elegit  $a$ ; però si els vots són 60  $a$   $b$ , 40  $b$ , llavors surt elegit  $b$ . Això té l'inconvenient que incita els electors a votar només un candidat, la qual cosa perjudica la proporcionalitat.

D'altra banda, i tal com observava ja Hare [11, p. 188, 305], en general aquest mètode es presta a estratègies que condueixen a resultats artificiosos.

Quant a simplicitat, és certament un mètode prou senzill, però a costa dels efectes indesitjables que estem dient. La qüestió del comportament asimptòtic en el cas de dos partits la deixem de banda, ja que no té sentit per al vot preferencial.

## 6 Un intent no reeixit de passar a un mètode de divisor

Per a llistes tancades disjunctes, les regles de les restes majors i de D'Hondt estan relacionades entre elles de la manera següent: la de D'Hondt correspon a ajustar la quota de manera que s'assignin exactament  $n$  escons sense fer ús de les restes. En el cas que estem considerant de llistes obertes (possiblement no disjunctes), es pot intentar fer el mateix des del procediment d'Eneström i

<sup>1</sup> De fet, aquest procediment havia estat utilitzat ja en el segle XVI en l'elecció d'abats als Països Baixos [34, p. 325–326].

Phragmén, és a dir, ajustar la quota de manera que s'assignin exactament  $n$  escons, cadascun dels quals a canvi d'una quota, i que cap dels altres candidats no assoleixi una quota. En la nostra notació, i tenint en compte la possibilitat d'empats, això equival a dir que la quota  $q$  i el nombre d'escons  $n$  han d'estar relacionats de la manera següent:

$$w_*[n-1] \geq q \geq w_*[n], \quad (23)$$

on els valors  $w_*[s]$  són obtinguts mitjançant l'algorisme de la secció 1, i, per tant, depenen de  $q$ .

OBSERVACIÓ 6.1. Les desigualtats precedents són anàlogues a les següents per a la regla de D'Hondt (vegeu [33, apartat 4.6]):

$$\min_i v_i/n_i \geq q \geq \max_i v_i/(n_i + 1).$$

Malauradament, aquest pla es veu obstaculitzat per diverses dificultats. Per començar, per a un  $n$  donat hi pot haver diversos valors de  $q$  que satisfan (23) però condueixen a diferents assignacions dels  $n$  escons. Per a fer front a aquesta dificultat, es pot pensar a especificar més  $q$ , per exemple, exigint que sigui al més gran possible. Tanmateix, aquesta condició no és fàcil de calcular. De fet, pot semblar que es tracta de resoldre l'equació  $w_*[n-1] = q$  (on el costat esquerre depèn de  $q$ ), però de vegades aquesta equació no té cap solució.

Aquestes dificultats es donen, per exemple, en el cas següent, on  $A$ ,  $B$  i  $C$  són tres llistes de partit:

$$7 A, \quad 10 B, \quad 5 AB, \quad 17 C, \quad 13 AC, \quad 4 BC. \quad (24)$$

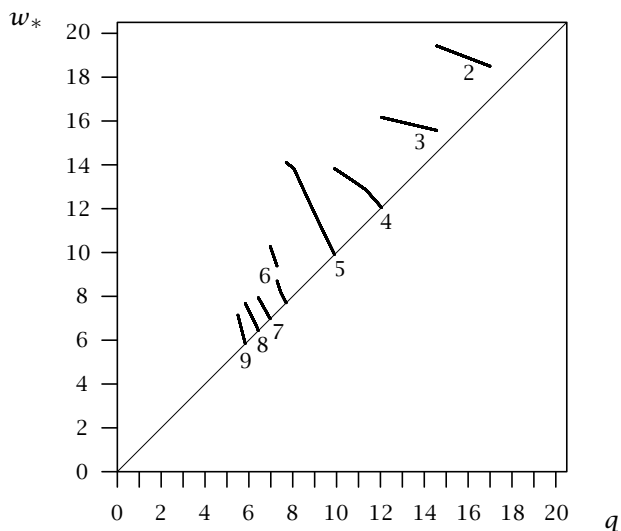


FIGURA 4:  $w_*[n-1]$  en funció de  $q$  per a l'exemple (24) i diversos valors de  $n$ .



La figura 4 mostra la dependència de  $w_*[n-1]$  en funció de  $q$  per a  $n = 2, \dots, 9$ . Com es pot veure, per a  $n = 2, 3$  les corbes corresponents no arriben a la diagonal  $w_*[n-1] = q$ . D'altra banda, per a  $n = 6$  la corba corresponent presenta una discontinuïtat que s'associa amb el fet que el resultat canvia de 4 C, 1 A, 1 B a 3 C, 2 A, 1 B.

## 7 Provisió de substituïts

A la pràctica, cal preveure la possibilitat que algun dels candidats elegits deixi d'estar disponible en algun moment i hagi de ser substituït. Per tal de mantenir la representativitat del conjunt de candidats elegits, l'ideal seria que el substituït donés representació als mateixos electors que el candidat que ha deixat d'estar disponible. Per a llistes tancades, la solució és òbvia: basta prendre com a substituït un altre candidat de la mateixa llista. Això val fins i tot quan es permet que l'elector aprovi més d'una llista, sempre que la del candidat a substituir contingui encara algun candidat no elegit (altrament caldrà considerar els vots equivalents en termes de candidats individuals).

En el cas general la solució no és tan fàcil. Per al mètode que s'ha exposat en aquest article és natural procedir de la manera següent: 1. Als vots i fraccions de vot romanents després d'haver assignat els  $n$  escons, s'hi reintegren tots els vots i fraccions de vot a canvi dels quals havia estat elegit el candidat que ha deixat d'estar disponible. 2. Fet això, s'executa una vegada més el procediment d'assignació d'un nou escó, amb l'única consideració que aquell candidat no és considerat elegible.

Vegem com fariem això en l'exemple 1.1 de la p. 118. Suposem que deixa d'estar disponible el candidat  $a$ . Aquest havia estat elegit en primer lloc, a canvi de 25 vots, concretament els  $v_k[0] - v_k[1]$  que s'especifiquen tot seguit, que s'obtenen a partir dels 43 vots en què apareix  $a$  aplicant el factor  $25/43$ :

$$12.209 \ a b x, \quad 11.628 \ a b e f, \quad 1.163 \ a e u.$$

Per elegir el substituït, reintegrem aquests vots als que havien quedat al final (p. 119); el resultat són els valors següents de  $v_k[3] + v_k[0] - v_k[1]$ :

$$12.209 \ a b x, \quad 20 \ a b e f, \quad 4.535 \ e f u v, \quad 3.103 \ u v, \\ 0 \ x y, \quad 15 \ z, \quad 1.363 \ a e u.$$

El suport que té ara cada candidat és el següent, on els parèntesis indiquen candidats no elegibles (ja elegits o no disponibles):

$$(a \ 33.572), \quad b \ 32.209, \quad e \ 25.898, \quad f \ 24.535, \\ (u \ 9), \quad v \ 7.637, \quad (x \ 12.209), \quad y \ 0, \quad z \ 15.$$

Dels candidats elegibles, el que té més vots és  $b$ , que, per tant, resulta elegit en substitució de  $a$ . Això no és cap sorpresa, ja que aquests dos candidats apareixen gairebé sempre junts. Similarment passa amb  $u$  i  $v$ , de manera que,

en el cas de deixar d'estar disponible,  $u$  és substituït per  $v$ , tal com s'obté en considerar els valors de  $v_k[3] + v_k[1] - v_k[2]$ . En canvi,  $x$ , el candidat elegit en tercer lloc, apareix acompanyat unes vegades per  $y$  i altres vegades per  $b$  (i  $a$ ); si apliquem el procediment proposat, hem de considerar  $v_k[3] + v_k[2] - v_k[3] = v_k[2]$ , amb els valors que estan recollits a la pàgina 119, on es veu que comporten l'elecció de  $b$  com a substituït de  $x$ .

OBSERVACIÓ 7.1. El procediment proposat no és equivalent a fer córrer tot l'algorisme des del principi després d'haver suprimit el candidat que ha deixat d'estar disponible. En efecte, fer això podria comportar variacions en els candidats elegits subsegüentment.

OBSERVACIÓ 7.2. Si els candidats que deixen d'estar disponibles són més d'un, llavors tampoc no és el mateix tractar-los successivament en un ordre o altre ni tampoc tractar-los tots alhora. Per tant, a la pràctica caldrà que el reglament especifiqui una d'aquestes diferents alternatives.

OBSERVACIÓ 7.3. Phragmén ([30, 31, 32]) proposa un procediment diferent que suposa que cada elector pugui especificar ja els seus «suplents», que s'entendrien com uns candidats addicionals que l'elector encara admetria com a representants seus, però en segona instància. Tanmateix, la nostra proposta de més amunt és conceptualment més clara i té una aplicabilitat més general (per exemple, si deixa d'estar disponible un candidat que ja en substituïa un altre).

## Referències

- [1] BRAMS, S. J.; KILGOUR, D. M.; POTTHOFF, R. F. «Multiwinner approval voting: an apportionment approach». *Public Choice*, 178 (2019), 67–93.
- [2] BRILL, M.; FREEMAN, R.; JANSON, S.; LACKNER, M. «Phragmén's voting methods and justified representation». *Math. Program.*, 203 (1-2) (2024), 47–76.
- [3] BRILL, M.; LASLIER, F.; SKOWRON, P. «Multiwinner approval rules as apportionment methods». *Journal of Theoretical Politics*, 30 (2018), 358–382.
- [4] BURNITZ, G.; VARRENTRAPP, G. *Methode, bei jeder Art von Wahlen sowohl der Mehrheit als den Minderheiten die ihrer Stärke entsprechende Zahl von Vertretern zu sichern*. Frankfurt: I. D. Sauerländer, 1863. [Traducció anglesa: «A method of assuring to the minorities as well as to the majority, at all kinds of elections, the number of representatives corresponding to their strength». Apèndix B de Matthias N. FORNEY, *Political Reform by the Representation of Minorities* (Nova York), 1894, 159–174]
- [5] CASSEL, K. G. *Proportionella Val · Systematisk framställning*. Estocolm: Isaac Marcus' Boktryckeri-Aktiebolag, 1903.
- [6] D'HONDT, V. *Système Pratique et Raisonné de Représentation Proportionnelle*. Bruxelles: C. Muquardt, 1882.

- [7] ENESTRÖM, G. H. «Om aritmetiska och statistiska metoder för proportionella val». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 53 (1896), 543–570.
- [8] ENESTRÖM, G. H. Carta a l'editor. *Aftonbladet* (23 febrer 1896).
- [9] GIGON, A. «La représentation des minorités». *Journal des économistes*, 3ème série, 33 (1874), 61–73.
- [10] HARE, T. *The Machinery of Representation*. 2a ed. Londres: W. Maxwell, 1857.
- [11] HARE, T. *The Election of Representatives, Parliamentary and Municipal*. 3a ed. Londres: Longman, 1865.
- [12] HILL, I. D. «Party lists and preference voting». *Voting Matters*, 29 (2011), 15–19.
- [13] HUMPHREYS, J. H. *Proportional Representation*. Londres: Methuen, 1911.
- [14] JANSON, S. *Proportionella Valmetoder*. Uppsala: Uppsala Universitet, 2012–2018. [Disponibile en línia a: <http://www2.math.uu.se/~svante/papers/sjv6.pdf>]
- [15] JANSON, S. «Phragmén's and Thiele's election methods». Preprint (2016). [Disponibile en línia a: <https://arxiv.org/abs/1611.08826>]
- [16] JANSON, S. «Thresholds quantifying proportionality criteria for election methods». Preprint (2018). [Disponibile en línia a: <https://arxiv.org/abs/1810.06377>]
- [17] JANSON, S.; ÖBERG, A. «A piecewise contractive dynamical system and Phragmén's election method». *Bull. Soc. Math. France*, 147 (3) (2019), 395–441.
- [18] KLÖTI, E. «Die Proportionalwahl in der Schweiz. Geschichte, Darstellung und Kritik». *Zeitschrift für Schweizerische Statistik*, 37 (1901), 157–310.
- [19] KOPFERMANN, K. *Mathematische Aspekte der Wahlverfahren*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1991.
- [20] LACKNER, M.; SKOWRON, P. *Multi-Winner Voting with Approval Preferences*. Cham: Springer, 2023. (SpringerBriefs Intell. Syst.)
- [21] MITTAG-LEFFLER, G. [Skrivelse till Justitiedepartementet, Finland, med redovisning för resultatet av en granskning utav "tvänne förslag till proportionell valmetod" i Finland — inlämnade till departementet av A. Lindstedt och E. Phragmén — som av Mittag-Leffler utförts på uppdrag av Chefen för Justitiedepartementet]. Manuscrit. Estocolm: Kungliga Biblioteket, 1906. (Gösta Mittag-Leffler Papper; L62:55, n. 2)
- [22] MORA, X.; OLIVER, O. «Eleccions mitjançant el vot d'aprovació. El mètode de Phragmén i algunes variants». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 30 (1) (2015), 57–101.
- [23] PETERS, D.; SKOWRON, P. «Proportionality and the limits of welfarism». Preprint (2019). [Disponibile en línia a: <https://arxiv.org/abs/1911.11747>]
- [24] PHRAGMÉN, E. «Om proportionella val». Conferència impartida a l'associació Studenter och Arbetare. Resum: *Stockholms Dagblad* (14 març 1893).

- [25] PHRAGMÉN, E. «Sur une méthode nouvelle pour réaliser, dans les élections, la représentation proportionnelle des partis». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 51 (3) (1894), 133-137.
- [26] PHRAGMÉN, E. *Proportionella Val · En valteknisk studie. Svenska Spörsmål* 25. Estocolm: Lars Hökerbergs, 1895.
- [27] PHRAGMÉN, E. «Sur la théorie des élections multiples». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 53 (1896), 181-191.
- [28] PHRAGMÉN, E. Carta a l'editor. *Aftonbladet* (23 febrer 1896).
- [29] PHRAGMÉN, E. «Till frågan om en proportionell valmethod». *Statsvetenskaplig Tidskrift*, 2 (1899), 297-308 (n. 2: 88-98).
- [30] PHRAGMÉN, E. «Utkast till föreskrifter beträffande val av riksdagsmän i andra kammaren och deras suppleanter». Estocolm: Kungliga Boktryckeriet, 1906.
- [31] PHRAGMÉN, E. «Promemoria beträffande en förenklad form af den af undertecknad föreslagna valmetoden». Manuscrit. Estocolm: Kungliga Biblioteket, 1906. (Gösta Mittag-Leffler Papper; L62:55, n. 4)
- [32] PHRAGMÉN, E. Incipit: «a§. Val sker efter uppropt». Manuscrit. Estocolm: Kungliga Biblioteket, 1906. (Gösta Mittag-Leffler Papper)
- [33] PUKELSHEIM, F. *Proportional Representation. Apportionment Methods and their Applications*. 2a ed. Cham: Springer, 2017.
- [34] REUSENS, E.; KUYL, P. D.; DE RIDDER, C. B. «Analectes pour servir a l'Histoire Ecclésiastique de la Belgique». Lovaina: Ch. Peeters; Bruxelles: H. Goemaere, 1868.
- [35] SÁNCHEZ-FERNÁNDEZ, L.; ELKIND, E.; LACKNER, M. «Committees providing EJR can be computed efficiently». Preprint (2017). [Disponibile en línia a: <https://arxiv.org/abs/1704.00356>]
- [36] STUBHAUG, A. *Gösta Mittag-Leffler. A man of conviction*. Berlín: Springer-Verlag, 2010.
- [37] TENOW, N. B. «Felaktigheter i de Thieleska valmetoderna». *Statsvetenskaplig Tidskrift*, 15 (1912), 145-165.
- [38] THIELE, T. N. «Om flerfoldsvalg». *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger*, 1895 (4) (1895), 415-441. [Resum en francès: «Sur la théorie des élections multiples et sur quelques règles d'application pratique». *Ibidem*, xv-xviii]
- [39] TIDEMAN, N. «The single transferable vote». *Journal of Economic Perspectives*, 9 (1) (1995), 27-38.

## Dos teoremes i una demostració de Dennis Sullivan

NÚRIA FAGELLA I JOAN PORTI

**Resum:** El 1983 Dennis Sullivan tancà un problema de dinàmica holomorfa, sobre aplicacions racionals de l'esfera de Riemann, que feia més de seixanta anys que estava obert. Amb les mateixes tècniques va fer una nova demostració d'un teorema d'Ahlfors sobre grups kleinians, i va iniciar un període d'intensa activitat i interacció entre les dues àrees.

**Paraules clau:** dinàmica holomorfa, transformació racional, domini errant, grup kleiniana, superfície de Riemann.

**Classificació MSC2020:** 37F31, 37F32, 30F40.

### 1 Introducció

Dels dos teoremes als quals fem referència en el títol de l'article, un és sobre grups kleinians i l'altre sobre dinàmica holomorfa. I parlem d'una única demostració perquè el 1983 Sullivan resolgué el cèlebre problema de Fatou-Julia sobre dominis errants, en dinàmica holomorfa, i essencialment amb el mateix argument donà una nova demostració del teorema de finitud d'Ahlfors, en grups kleinians. D'aquesta manera començava una intensa col·laboració entre les dues àrees, i ho volem explicar en aquest article.

Comencem per la teoria de *grups kleinians*, iniciada a finals del segle XIX amb els treballs de Felix Klein [18] i Henri Poincaré [30] (que li donà el nom en honor de Klein). Un grup kleiniana  $\Gamma$  és un grup discret de transformacions de Möbius, o homografies, de l'esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , és a dir, aplicacions de la forma  $y(z) = (az + b)/(cz + d)$ . Quan parlem de l'*òrbita* d'un punt  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , ens referim al conjunt  $\Gamma z := \{y(z), y \in \Gamma\}$ . Per a tot grup kleiniana  $\Gamma$  tenim una partició *dinàmica* de l'esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  en dos conjunts *invariants*

$$\hat{\mathbb{C}} = \Lambda(\Gamma) \sqcup \Omega(\Gamma),$$

---

Aquest article ha estat escrit amb el suport de (1) l'Agència Estatal de Investigació a través dels projectes PID2020-118281GB-C32 i PID2021-125625NB-I00 i el programa Severo Ochoa i María de Maeztu per a centres i unitats d'excel·lència en R + D CEX2020-001084-M; (2) la Generalitat de Catalunya a través del projecte 2021-SGR-01015 i el programa ICREA Acadèmia 2020.

on  $\Lambda(\Gamma)$  (tancat) denota el *conjunt límit* o conjunt de punts d'acumulació d'una òrbita  $\Gamma z \subset \widehat{\mathbb{C}}$  qualsevol (no depèn de l'òrbita escollida), mentre que el seu complementari  $\Omega(\Gamma)$  és l'obert conegut com a *conjunt ordinari*, o *normal*, o també com a *domini de discontinuïtat*, ja que  $\Gamma$  actua de manera pròpiament discontinua a  $\Omega(\Gamma)$  (és a dir, totes les òrbites són conjunts discrets de punts a  $\Omega(\Gamma)$ ). Sovint, el conjunt límit d'un grup kleinianà és un conjunt fractal, com per exemple el de la figura 1.

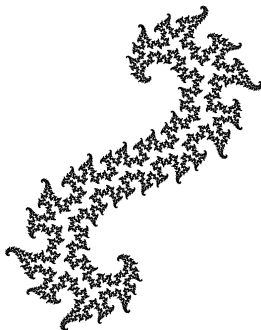


FIGURA 1: Exemple de conjunt límit d'un grup kleinianà. (Font: Chris King.)

A la dècada de 1960 hi va haver contribucions molt rellevants amb els treballs de Lars Ahlfors i Lipman Bers [1, 2, 3], que, inspirant-se en resultats previs de Teichmüller, van desenvolupar la teoria de deformacions quasiconformes per a grups kleinians, relacionant-los amb les superfícies de Riemann. Un dels principals teoremes és el *teorema de finitud d'Ahlfors* [1], un dels dos protagonistes del text que ens ocupa. Aquest resultat estableix que el quocient del domini de discontinuïtat  $\Omega(\Gamma)$  per l'acció del grup  $\Gamma$  té un nombre finit de components que són superfícies de Riemann de *tipus finit*, és a dir, conformement equivalents a una superfície compacta menys un nombre finit de punts.

Paral·lelament, a començaments del segle XX, i motivats per processos iteratius com els generats pel mètode de Newton, així com per les solucions d'equacions funcionals, Pierre Fatou ([13]) i Gaston Julia ([16]) desenvoluparen la teoria d'iteració de funcions holomorfes. En aquest context, si  $f = P/Q$  és una funció racional (irreductible) de grau  $d \geq 2$ , on  $d = \text{grau}(f) = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$ , l'òrbita d'un punt  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  ve donada per l'aplicació successiva de  $f$ , que dona lloc a la successió

$$\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_n, \dots\},$$

on  $z_n := f^n(z_0) := f \circ \dots \circ f(z_0)$ , per a  $n \geq 1$ . Observem que, a diferència de la situació anterior, aquí les òrbites venen amb una relació d'ordre, i ens preocupem, doncs, del seu comportament asimptòtic quan  $n$  tendeix a infinit. Anàlogament al cas dels grups kleinians, l'esfera de Riemann també es descompon en dos conjunts totalment invariants (és a dir, invariants per  $f$  i per les diferents branques de  $f^{-1}$ ),

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathcal{J}(f) \sqcup \mathcal{F}(f),$$

on  $\mathcal{F}(f)$  denota el *conjunt normal* o de *Fatou* o conjunt de punts per als quals la successió d'iterats  $(f_n)_n$  és equicontínua (o normal), mentre que el seu complementari,  $\mathcal{J}(f)$ , es coneix avui com a *conjunt de Julia*, i és el conjunt en què  $f$  té un comportament *caòtic* (vegeu la figura 2). Intuïtivament, podem veure l'analogia del conjunt de Julia amb el conjunt límit d'un grup kleinià considerant el grup generat per les diferents branques de la inversa de  $f$  (allà on estiguin ben definides),  $\Gamma = \langle f_1, \dots, f_a \rangle$ , ja que, en efecte, es dona que  $\mathcal{J}(f)$  coincideix amb els punts d'acumulació de l'òrbita de qualsevol punt sota l'acció de  $\Gamma$  (en el sentit definit anteriorment).

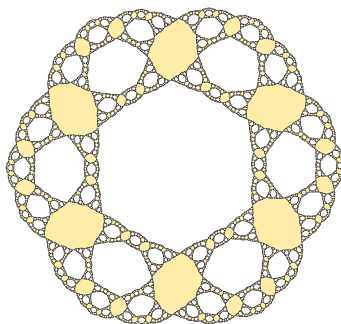


FIGURA 2: En negre, el conjunt de Julia de la funció  $f(z) = z^3 - \frac{0.12}{z^3}$ .

Fent ús de la teoria de famílies normals, que Paul Montel ([24]) havia desenvolupat feia poc, Fatou i Julia van arribar a obtenir una classificació exhaustiva dels possibles components connexos *periòdics* del conjunt de Fatou, és a dir, d'aquells components  $U \subset \mathcal{F}(f)$  tals que  $f^p(U) = U$  per a alguna  $p \geq 1$ . Van deixar oberta, no obstant això, la possible existència dels *dominis errants*, és a dir, components del conjunt normal que no fossin periòdics ni antiimatges de components periòdics. Aquest problema, junt amb d'altres, va romandre obert durant més de seixanta anys, un període letàrgic de la dinàmica complexa en espera de noves eines per seguir avançant.

El 1985 Sullivan va publicar la solució del problema de Fatou-Julia sobre dominis errants. En un article excepcional [33], Sullivan no només resolva aquesta qüestió de dinàmica holomorfa que feia tant temps que estava oberta, sinó que, amb un argument molt semblant (usant deformacions quasiconformes), feia una nova demostració del teorema de finitud d'Ahlfors. La demostració de Sullivan va descobrir punts en comú entre els dos temes de recerca i donà lloc al que s'anomena *diccionari de Sullivan*, que estableix analogies entre objectes, resultats i idees dels dos camps.

L'impacte que va tenir aquest resultat va ser majúscul, no tant pel teorema en si mateix (que també), sinó perquè va obrir vasos comunicants entre dues àrees que fins aleshores s'havien considerat diferents, fet que va provocar una explosió de nous avenços en aquestes disciplines (molts d'ells del mateix Sullivan) al llarg de finals del segle xx. La teoria de funcions quasiconformes havia penetrat amb força a la dinàmica complexa —la tècnica que es coneix com a *cirurgia quasiconforme* [10] és avui part de la formació bàsica de qualsevol estudiant de doctorat a l'àrea.

Dennis Sullivan va rebre el premi Abel 2022 i vam pensar que seria una bona ocasió per escriure el present article.

La resta de l'article està dividida en tres seccions més. A la segona secció, introduïm els grups kleinians i les nocions necessàries per enunciar el teorema de finitud d'Ahlfors; a la tercera secció, fem el mateix amb la dinàmica holomorfa i el teorema de no existència de dominis errants. Finalment, a la secció 4 presentem un esbòs de les dues demostracions, que són dues aplicacions d'una mateixa idea, fent servir eines que serveixen tant per a dinàmica holomorfa com per a grups kleinians. Ho aprofitem per acabar amb el diccionari de Sullivan, que estableix analogies entre els dos camps.

## 2 Grups kleinians i el teorema de finitud d'Ahlfors

### 2.1 Grups kleinians

En aquesta secció fem una breu introducció als grups kleinians, és a dir, grups discrets de transformacions de Möbius o homografies de l'esfera de Riemann (o la recta projectiva complexa)  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Aquestes homografies són transformacions racionals de grau 1, és a dir, aplicacions de la forma  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ . Mitjançant els coeficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ , el grup d'homografies s'identifica de manera natural al grup de matrius  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ , és a dir, el grup de matrius  $2 \times 2$  a coeficients complexos i determinant 1, llevat de signe (vegeu, per exemple, [6]).

EXEMPLE. Considerem el grup modular  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , que és discret i, per tant, un grup kleinianà. És a dir, el grup de transformacions conformes  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , amb  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  i  $ad - bc = 1$ . Aquest grup actua de manera pròpiament discontinua en el semiplà superior  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ . A la figura 3 en representem un domini fonamental. Des del punt de vista dels grups kleinians, ens mirem  $\Gamma$  com un grup de transformacions de tota l'esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ . El grup  $\Gamma$  actua de manera pròpiament discontinua als semiplans superior i inferior  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \neq 0\}$  i les òrbites s'acumulen al cercle real  $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

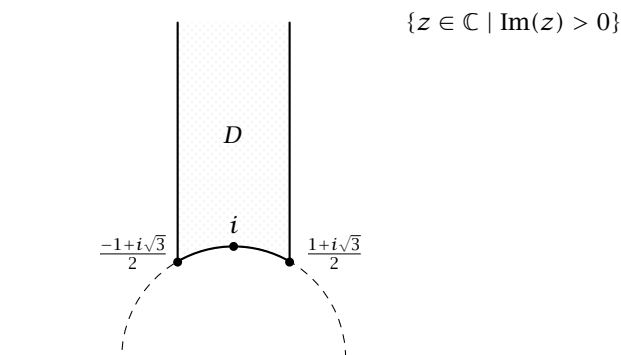


FIGURA 3: El domini  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$  és un domini fonamental per al grup modular  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ : cada òrbita de  $\Gamma$  en el semiplà  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  talla un sol punt de l'interior de  $D$ , o bé en un o dos punts de la vora de  $D$ .



Recordem de la introducció que el conjunt de punts d'acumulació d'una òrbita  $\Gamma x \subset \widehat{\mathbb{C}}$  s'anomena *conjunt límit* i es denota amb  $\Lambda(\Gamma)$ . En el cas que  $\Gamma$  sigui finit, seguim la convenció que  $\Lambda(\Gamma) = \emptyset$ . Recordem també que el *domini de discontinuïtat* d'un grup kleinià és el complement del conjunt límit  $\Omega(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$ . Tenim una partició dinàmica  $\widehat{\mathbb{C}} = \Omega(\Gamma) \cup \Lambda(\Gamma)$ , perquè l'acció de  $\Gamma$  a  $\Omega(\Gamma)$  és pròpiament discontinua i el tancat  $\Lambda(\Gamma)$  és el subconjunt de punts d'acumulació de qualsevol òrbita  $\Gamma x = \{y x \mid y \in \Gamma\}$ .

En l'exemple del grup modular  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , tenim que  $\Lambda(\Gamma) = \widehat{\mathbb{R}}$  és un cercle i que  $\Omega(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \neq 0\}$  consisteix en dos discs, tal com es pot veure a la figura 4.

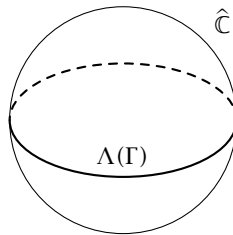


FIGURA 4: El conjunt límit del grup modular  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  és  $\Lambda(\Gamma) = \widehat{\mathbb{R}}$ , que representem com l'equador a la figura.

LEMA 1. *La cardinalitat del conjunt límit  $|\Lambda(\Gamma)|$  és 0, 1, 2 o  $\infty$ .*

DEFINICIÓ 2. Un grup kleinià  $\Gamma$  es diu que és *elemental* quan  $|\Lambda(\Gamma)| \leq 2$  i *no elemental* quan  $|\Lambda(\Gamma)| > 2$ , és a dir, quan  $|\Lambda(\Gamma)| = \infty$ .

Els grups elementals tenen una dinàmica molt senzilla: si  $|\Lambda(\Gamma)| = 2$ , la dinàmica és d'atractor/repulsor, i si  $|\Lambda(\Gamma)| = 1$ , la dinàmica és parabòlica. A més, algebraicament els grups elementals són o bé finits (aleshores,  $\Lambda(\Gamma) = \emptyset$ ), o bé una extensió finita de  $\mathbb{Z}$  (aleshores,  $|\Lambda(\Gamma)| = 1$  o  $2$ ) o de  $\mathbb{Z}^2$  (aleshores,  $|\Lambda(\Gamma)| = 2$ ). La teoria de grups kleinians se centra en els grups no elementals i d'ara endavant suposarem que tots els grups kleinians són *no elementals*.

PROPOSICIÓ 3. *Si  $\Gamma$  és un grup kleinià, aleshores  $\Lambda(\Gamma)$  és compacte, perfecte i minimal.*

Quan es diu que  $\Lambda(\Gamma)$  és perfecte, vol dir que no té punts aïllats, i que sigui minimal vol dir que qualsevol òrbita s'acumula en tot  $\Lambda(\Gamma)$ .

EXEMPLE. Un *grup fuchsian* és un grup discret de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , és a dir, un grup d'isometries del pla hiperbòlic en el model del semiplà  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ . El nom també és degut a Poincaré [29], en honor dels treballs de Lazarus Fuchs.

De la mateixa manera que per al grup modular, mitjançant la inclusió  $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ , un grup fuchsian es pot veure com un grup kleinià, i el conjunt límit  $\Lambda(\Gamma)$  és un subconjunt del cercle  $\widehat{\mathbb{R}}$ . Això inclou els grups de superfície de gènere  $g > 1$ ; en aquest cas el conjunt límit és  $\Lambda(\Gamma) = \widehat{\mathbb{R}}$ , com a la figura 4.

EXEMPLE. Els *grups de Schottky* prenen el nom dels primers exemples de Friedrich Schottky [31]. Considerem quatre discs disjunts  $A, B, C, D \subset \mathbb{C}$ , com a la figura 5. Siguin  $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  automorfismes conformes tals que:

$$\gamma_1(\widehat{\mathbb{C}} - B) = A \quad \text{i} \quad \gamma_2(\widehat{\mathbb{C}} - C) = D.$$

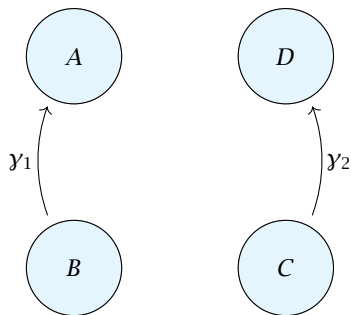


FIGURA 5: Grup de Schottky, generat per  $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ , que compleixen  $\gamma_1(\widehat{\mathbb{C}} - B) = A$  i  $\gamma_2(\widehat{\mathbb{C}} - C) = D$ .

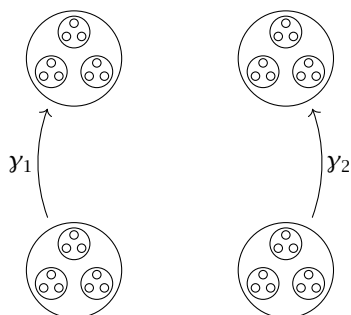


FIGURA 6: Òrbites dels cercles, que s'acumulen en un conjunt de Cantor  $\Lambda(\Gamma)$ . En particular,  $\Omega(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$  és una superfície planar connexa d'àrea infinita.

És a dir,  $\gamma_1$  defineix un homeomorfisme entre l'exterior de  $B$  i l'interior de  $A$ , i  $\gamma_2$  ho fa entre l'exterior de  $C$  i l'interior de  $D$ . En particular,  $\gamma_1(A) \subset A$  i  $\gamma_2(C) \subset C$ .

Per construcció,  $\gamma_1(A)$ ,  $\gamma_1(C)$  i  $\gamma_1(D)$  són cercles disjunts a l'interior de  $A$ , i tenim afirmacions similars per a  $\gamma_1^{-1}$  i  $\gamma_2^{-1}$ . Si iterem aquest procés, obtenim inclusions successives amb les quals demostrarem que  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  generen un grup lliure que és discret. A més, el conjunt límit  $\Lambda(\Gamma)$  en aquest cas és un conjunt de Cantor, que és el límit de les iteracions de cercles, representat a la figura 6. El domini de discontinuïtat  $\Omega(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$  és connex, però té topologia infinita. La superfície  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  és una superfície compacta de gènere 2.

Per al proper exemple necessitem una definició que s'utilitza tant en grups kleinians com en dinàmica holomorfa, i que farem servir en seccions posteriors. La noció de quasiconformitat és una relaxació de la conformitat. Si una aplicació conforme porta cercles a cercles (a nivell infinitesimal), una aplicació quasiconforme porta cercles a corbes que potser no són cercles, però que estan contingudes entre dos cercles de radi controlat.

DEFINICIÓ 4 (HOMEOMORFISME QUASICONFORME). Un homeomorfisme  $\phi: U \rightarrow V$  entre dos oberts de  $\mathbb{C}$  s'anomena  $K$ -*quasiconforme* si, per a tot  $x \in U$ , es compleix

$$H_\phi(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup\{|\phi(z) - \phi(x)| \mid |z - x| = r\}}{\inf\{|\phi(z) - \phi(x)| \mid |z - x| = r\}} \leq K.$$

Diem que  $\phi$  és *quasiconforme* quan és  $K$ -quasiconforme per a algun  $K \geq 1$ . Ser 1-quasiconforme equival a ser holomorfa o antiholomorfa.

Geomètricament, si una aplicació conforme preserva angles, una de quasiconforme pot distorsionar-los, però de manera controlada.

EXEMPLE. Un grup *quasifuchsian* és un grup kleinian pel qual existeix un homeomorfisme quasiconforme  $\phi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tal que  $\phi\Gamma\phi^{-1}$  és fuchsian, on el conjugat  $\phi\Gamma\phi^{-1}$  denota el grup format per elements de la forma  $\phi\gamma\phi^{-1}$  amb  $\gamma \in \Gamma$ . Es pot demostrar (per exemple a [17, teorema 8.17]) que un grup és quasifuchsian si i només si el seu conjunt límit és la imatge d'una circumferència per un homeomorfisme quasiconforme, com a la figura 7.

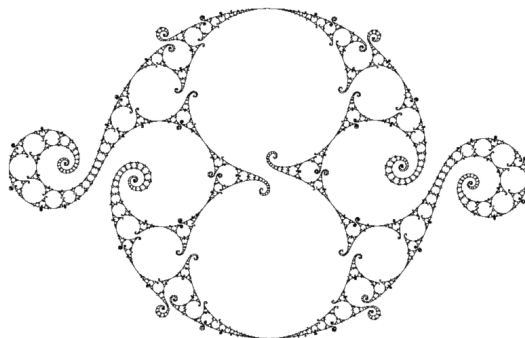


FIGURA 7: Conjunt límit d'un grup quasifuchsian representat al pla  $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ . El domini de discontinuïtat  $\Omega(\Gamma)$  té dos components homeomorfs a discs. (Font: Dave Dumas.)

EXEMPLE. Les deformacions de l'exemple anterior s'anomenen *quasiconformes*. Es poden construir deformacions d'un grup kleinian  $\Gamma$  que no són necessàriament quasiconformes. Considerem representacions de  $\Gamma$  en  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  fidels i discretes (és a dir, morfismes de grup  $\Gamma \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  injectius amb imatge discreta). D'aquesta manera, es poden deformar grups que deixin de ser quasifuchsians i obtenir conjunts límit que ja no són corbes simples. En particular,

pot haver-hi grups «amb cusps», com a la figura 8, o grups que s'anomenen *degenerats*, com a la figura 9, també pot ser una manera de construir corbes de Peano de  $\hat{\mathbb{C}}$ , és a dir, aplicacions contínues del cercle  $S^1$  a  $\hat{\mathbb{C}} \cong S^2$  que són equivariants per l'acció d'un grup de Möbius. Aquestes corbes de Peano s'anomenen *aplicacions de Cannon-Thurston* [23] i s'obtenen com a aplicació del conjunt límit d'un grup fuchsità, que és  $S^1$ , al conjunt límit del grup kleinià, que pot ser tot  $\hat{\mathbb{C}} \cong S^2$ .

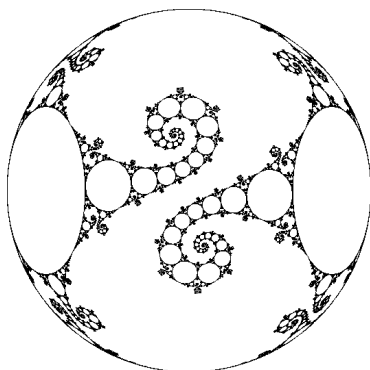


FIGURA 8: Conjunt límit d'un grup que no és quasifuchsità, representat a l'esfera  $\hat{\mathbb{C}}$ . El domini de discontinuïtat  $\Omega(\Gamma)$  té infinits components, que són discs. (Font: Curt McMullen.)

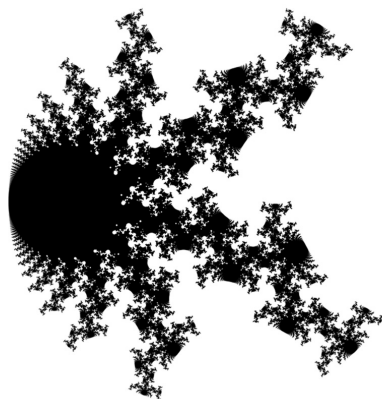


FIGURA 9: Conjunt límit d'un grup kleinià degenerat. En aquest cas el domini de discontinuïtat  $\Omega(\Gamma)$  és connex. (Font: Jeff Brock.)

Els grups kleinians estan relacionats amb les varietats hiperbòliques de dimensió tres, perquè l'esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  és la *frontera ideal* de l'espai hiperbòlic  $\mathbb{H}^3$ . A més,  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  és el grup d'isometries de l'espai hiperbòlic que preserven l'orientació: tota isometria de  $\mathbb{H}^3$  s'estén de manera natural a una única transformació de Möbius de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Mitjançant aquesta relació, l'estudi dels grups kleinians va renovar el seu interès a la dècada del 1980, a partir dels treballs de Thurston en varietats hiperbòliques tridimensionals [35]. Sens dubte, l'embranchida que li va donar Sullivan va ser-ne una altra de les causes.

## 2.2 El teorema de finitud d'Ahlfors

Per simplificar l'exposició, considerem grups kleinians  $\Gamma < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  que no tenen elements d'ordre finit, és a dir, elements  $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  no trivials que compleixen que  $\gamma^n$  és trivial per a un cert  $n \in \mathbb{N}$ . Tots els enunciats es poden formular sense dificultat en el cas que  $\Gamma$  tingui elements d'ordre finit, però l'exposició és una mica més llarga. A més, pel lema de Selberg tot grup kleinianà  $\Gamma < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  té un subgrup  $\Gamma_0 < \Gamma$  d'índex finit sense elements d'ordre finit, i molts arguments es redueixen a aquest cas [17].

Sigui  $\Gamma < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  un grup kleinianà amb domini de discontinuïtat  $\Omega(\Gamma)$ . Com que  $\Omega(\Gamma)$  és un obert de l'esfera de Riemann, possiblement amb infinits components o amb topologia infinita,  $\Omega(\Gamma)$  és una superfície conforme (és a dir, una superfície amb un atlas conforme o holomorfe). A més, l'acció de  $\Gamma$  a  $\Omega(\Gamma)$  és conforme i pròpiament discontinua i, com que suposem que no hi ha elements d'ordre finit, l'acció de  $\Gamma$  a  $\Omega(\Gamma)$  no té punts fixos. En conseqüència, el quocient  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  és una superfície de Riemann.

**TEOREMA 5 (FINITUD D'Ahlfors, 1964 [1]).** *Sigui  $\Gamma$  un grup kleinianà amb un nombre finit de generadors. Aleshores la superfície  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  és hiperbòlica de tipus conforme finit.*

Una de les conseqüències del teorema és que  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  té un nombre finit de components, la qual cosa es pot veure com un resultat anàleg al teorema de Sullivan sobre la no existència de dominis errants.

Una superfície de Riemann pot ser el·líptica (si és l'esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ ), parabòlica (si és  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , o  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ ) o hiperbòlica (tota la resta).

**DEFINICIÓ 6 (TIPUS CONFORME FINIT I HIPERBOLICITAT).** Una superfície de Riemann és de *tipus conforme finit* si és conformement equivalent a una superfície de Riemann compacta, possiblement menys un nombre finit de punts.

Si una superfície de Riemann és *hiperbòlica*, aleshores és el quocient d'un disc per un grup discret de transformacions conformes, i la mètrica de Poincaré del disc indueix una mètrica hiperbòlica de la superfície de Riemann. Ser de tipus finit és equivalent a tenir àrea hiperbòlica finita.

Donat un component connex  $\Omega_0$  del domini de discontinuïtat  $\Omega(\Gamma)$ , denotem amb  $\Gamma_0$  el seu estabilitzador a  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\Omega_0 = \Omega_0\}$ . La part més interessant de la demostració del teorema de finitud d'Ahlfors és la proposició següent.

**PROPOSICIÓ 7.** *Per cada component connex  $\Omega_0$  de  $\Omega(\Gamma)$ , el conjunt límit del seu estabilitzador  $\Gamma_0$  és tota la frontera de  $\Omega_0$ ,  $\Lambda(\Gamma_0) = \partial\Omega_0$ .*

Com que  $\Gamma_0$  estabilitza  $\Omega_0$ , el conjunt límit  $\Lambda(\Gamma_0)$  és un subconjunt de  $\partial\Omega_0$ ,  $\Lambda(\Gamma_0) \subseteq \partial\Omega_0$ , i la teoria clàssica de superfícies hiperbòliques ens diu que tenim igualtat,  $\Lambda(\Gamma_0) = \partial\Omega_0$ , si i només si  $\Omega_0/\Gamma_0$  és una superfície de Riemann de tipus finit. Aquesta proposició es podria veure com una conseqüència del teorema de finitud d'Ahlfors, però en realitat és una etapa molt important de la

demostració. Ens fixem en aquesta proposició i en el fet que  $\Omega/\Gamma$  té un nombre finit de components, perquè és on Sullivan va fer una nova demostració en l'article de dinàmica holomorfa, com explicarem més endavant.

### 3 Dinàmica holomorfa i el teorema de Sullivan

#### 3.1 Transformacions racionals: dinàmica holomorfa

Donada una funció racional  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , on  $P$  i  $Q$  són polinomis sense termes en comú, hom pot considerar el sistema dinàmic generat per la iteració de  $f$ , és a dir, les òrbites  $(z_n := f^n(z_0))_n$  de les diferents condicions inicials  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Processos iteratius d'aquesta mena apareixen de manera natural en modelar fenòmens que evolucionen en temps discrets, o en algorismes numèrics de, per exemple, càlcul aproximat d'arrels de polinomis, com podria ser el conegut mètode de Newton.

La funció racional  $f$ , i, per tant, el sistema dinàmic, s'estén de manera natural a l'esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$ , equipada amb la mètrica esfèrica, estenent  $f$  per continuïtat als zeros de  $Q$  (pols de  $f$ ) i a l'infinit. Les òrbites de  $f$  poden comportar-se de maneres diferents. Així doncs, entre elles trobem els *equilibris del sistema*, és a dir, les *òrbites periòdiques de període  $p$* , quan  $z_n = z_{n+p}$  per a alguna  $p \geq 1$  i per a tota  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ; o les que tendeixen a una òrbita periòdica; o, ben diferentment, les que es comporten de manera aparentment erràtica o caòtica, com per exemple omplint de manera densa alguna part de l'esfera.

L'objectiu dels sistemes dinàmics en general, i de la dinàmica holomorfa en particular, és estudiar i classificar el comportament asimptòtic de les òrbites en termes de la condició inicial. Donat que les transformacions de Möbius tenen una dinàmica força simple, considerarem sempre que el *grau* de la funció racional,  $d := \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$ , és més gran o igual que 2, on  $d$  coincideix amb el nombre d'antiimatges de qualsevol punt de  $\hat{\mathbb{C}}$ , comptades amb multiplicitat.

Tal com hem esbossat a la introducció, l'esfera es divideix en dos conjunts totalment invariants (és a dir, formats per òrbites que no es barregen entre elles), que es defineixen com segueix.

**DEFINICIÓ 8.** El *conjunt de Fatou* d'una funció racional  $f$  és el conjunt obert més gran de  $\hat{\mathbb{C}}$  tal que la família d'iterats  $\{f^n\}_n$  és una família normal o equicontínua (en la mètrica esfèrica), és a dir,

$$F(f) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} \mid \{f^n\}_n \text{ és normal en algun entorn de } z_0\}.$$

El seu complementari, el *conjunt de Julia* de  $f$ , es defineix, per tant, com

$$J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} \mid \{f^n\}_n \text{ no és normal en cap entorn de } z_0\}.$$

Veurem a la secció 4.4 que, en el diccionari de Sullivan, el conjunt de Fatou és l'anàleg del conjunt de discontinuïtat d'un grup kleinià, mentre que el conjunt de Julia correspon al conjunt límit.

El concepte de família normal en un obert  $U$  fou desenvolupat per Montel [24] també a començaments del segle XX, i identifica aquestes famílies de funcions com aquelles per a les quals qualsevol parçal en té una que convergeix uniformement en compactes de  $U$ . Les òrbites de  $F(f)$  són, doncs, les òrbites *estables*, en el sentit que es comporten de manera similar a les seves òrbites veïnes. Contràriament, les òrbites de  $J(f)$  tenen un comportament inestable o *caòtic*. Un cas particular de les primeres serien aquelles que pertanyen a una *conca d'atracció*, és a dir, als oberts que envolten les òrbites periòdiques *atractores*, que, com el seu nom indica, atrauen totes les òrbites del seu voltant.

EXEMPLE (LA FUNCIO  $z^2$ ). El disc unitat (obert)  $\mathbb{D}$  per a la funció  $f(z) = z^2$ , que consisteix en òrbites que convergeixen en  $z = 0$  sota iteració, és un exemple d'una conca d'atracció. O bé, en aquest mateix exemple, també ho és el complementari del disc tancat  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ , format per òrbites que convergeixen uniformement en el punt de l'infinit. Aquests dos conjunts formen el conjunt de Fatou (o conjunt estable) de la funció  $f(z) = z^2$ . El seu complementari, el cercle unitat, és, doncs, el conjunt de Julia, i és senzill comprovar que és *totalment invariant* (és a dir,  $f(\mathbb{S}^1) = f^{-1}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ ), i que les seves òrbites es comporten d'una manera radicalment diferent a les descrites anteriorment. Mencionarem, per exemple, que  $\mathbb{S}^1$  conté un conjunt dens d'òrbites periòdiques de períodes arbitràriament alts, en aquest cas repulsores, és a dir, que repel·leixen les òrbites properes; però també que qualsevol entorn d'un punt de  $\mathbb{S}^1$  cobreix, sota iteracions successives, tots els punts de l'esfera excepte el zero i l'infinit.

Aquesta última propietat s'anomena *propietat de superexpansió* (*blow-up* en anglès), i juntament amb la densitat dels punts periòdics i moltes altres característiques interessants (associades al concepte de *caos*) no són particulars de  $z \mapsto z^2$ , sinó que són certes per al conjunt de Julia de qualsevol funció racional (i, de fet, de més generals i tot).

En analogia amb les propietats del conjunt límit d'un grup kleinià, mencionarem, per exemple, que el conjunt de Julia  $J(f)$  és un conjunt perfecte (és a dir, sense punts aïllats) de cardinal infinit; o que les successives antiimatges de qualsevol punt de l'esfera s'acumulen sempre en tot el conjunt de Julia, fet que escriuríem formalment com

$$J(f) \subseteq \overline{\{w \in \hat{\mathbb{C}} \mid f^n(w) = z, \text{ per algun } n \in \mathbb{N}\}},$$

per a qualsevol  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  (excepte com a màxim dos punts), i on es dona la igualtat si  $z \in J(f)$ .

De conjunts de Julia n'hi ha una immensa varietat, amb propietats analítiques, geomètriques i topològiques ben diferents: hi ha conjunts de Julia connexos, disconnexos i conjunts de Cantor; continus indescomponibles; de mesura zero o de mesura positiva; localment connexos o no localment connexos; amb qualsevol dimensió de Hausdorff predeterminada entre 1 i 2, etc. La relació entre aquestes propietats i certes característiques dinàmiques de la funció  $f$ , a vegades només relatives a uns pocs punts, han interessat els matemàtics des del 1900 fins avui dia, i han connectat la dinàmica complexa amb diferents àmbits de les matemàtiques, com la topologia, l'anàlisi, la teoria geomètrica de funcions o la teoria de nombres.

La propietat de superexpansió juntament amb la invariància del conjunt de Julia i el fet que les funcions holomorfes són funcions localment conformes excepte al voltant d'un nombre finit de punts fan que els conjunts de Julia exhibeixin una estructura fractal o autosemblant, que dona lloc a imatges tan interessants com les de la figura 10. Tot i que Fatou i Julia ja van intuir aquesta complexitat, no va ser fins a l'aparició dels ordinadors gràfics, al voltant del 1980, que aquests conjunts van poder ser visualitzats. Aquest fet va provocar un renaixement de la teoria, que va atraure matemàtics de moltes àrees diferents, entre ells John Milnor, Jean-Christophe Yoccoz i el mateix Dennis Sullivan. Expliquen els protagonistes de l'època que va ser durant la tardor del 1981, en un seminari a l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), quan Sullivan va exposar la connexió entre les deformacions quasiconformes de superfícies de Riemann, la teoria de grups kleinians i la dinàmica complexa, amb la qual cosa obria la porta a multitud d'aplicacions posteriors.

Per a un tractament rigorós de la dinàmica de funcions racionals podem consultar, per exemple, [7, 11, 22].

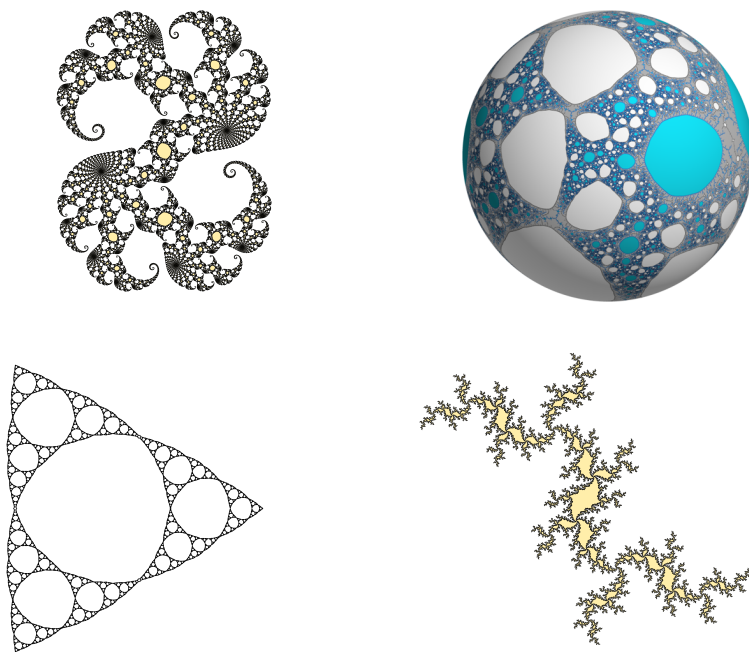


FIGURA 10: A dalt, a l'esquerra, conjunt de Julia (en negre) d'un polinomi de grau 2 amb una òrbita periòdica de període molt gran; a la dreta, funció racional dibuixada a l'esfera de Riemann (conques d'atracció en colors clars). A baix, a l'esquerra, conjunt de Julia (en negre) d'una funció racional; a la dreta, conjunt de Julia (en negre) d'un polinomi de grau 2 amb una òrbita periòdica atractora de període 9. La figura superior dreta és cortesia d'Arnaud Cheritat.



### 3.2 Els components de Fatou i el teorema de Sullivan

Partint de la definició, veiem que el conjunt de Fatou és un obert. Per a la funció  $f(z) = z^2$  (i, de fet,  $z^d$  per a qualsevol  $d$  amb  $|d| \geq 2$ ), hem vist que  $F(f)$  té exactament dos components connexos. Però aquests són casos ben especials (són els *productes de Blaschke*, anàlegs dels grups fuchsians), ja que, per a qualsevol altra funció racional, el conjunt de components de  $F(f)$  és infinit (numerable), cada un dels quals anomenat *component estable o de Fatou* de la funció  $f$ . En analogia al conjunt de discontinuïtat de grups kleinians, se sap que el nombre de components de Fatou és sempre 0, 1, 2 o  $\infty$ .

La total invariància del conjunt de Julia (al qual pertany la frontera de qualsevol component de Fatou) fa que si  $U$  és un component de Fatou,  $f(U)$  també ho sigui, essent  $f: U \rightarrow f(U)$  una funció pròpia (és a dir, una funció amb grau finit ben definit i més gran o igual a 1, i que envia la frontera de  $U$  a la frontera de  $f(U)$ ). S'estableix així un sistema dinàmic entre els components estables, els quals es poden classificar en primera instància de la manera següent.

DEFINICIÓ 9. Sigui  $U$  un component connex de  $F(f)$ . Diem que  $U$  és

- (a) *periòdic*, si  $f^p(U) = U$  per a algun  $p \geq 1$  (anomenat *invariant* o *fix* si  $p = 1$ );
- (b) *preperiòdic*, si  $f^k(U)$  és periòdic per a algun  $k > 1$ , però  $U$  no ho és; i
- (c) *errant*, si  $f^n(U) \cap f^m(U) = \emptyset$  per a tot  $n \neq m$ .

Els components periòdics van ser classificats amb més detall, en termes del comportament asimptòtic dels iterats  $f^n|_U$ , essent aquest el contingut del teorema de classificació de Fatou [13] (vegeu la figura 11).

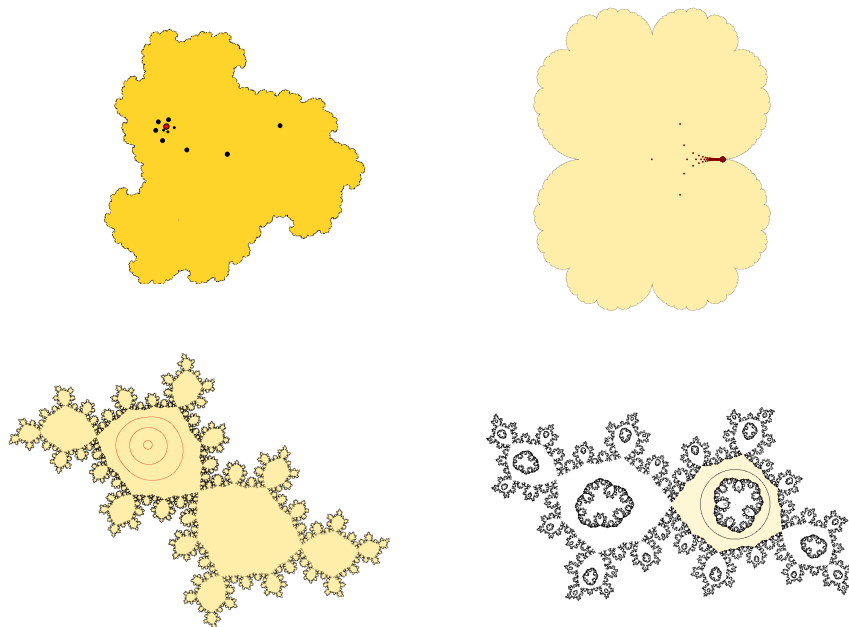


FIGURA 11: Els diferents tipus de components de Fatou: conca d'atracció, conca parabòlica, disc de Siegel i anell de Herman (component en groc). El gràfic mostra també algunes òrbites dins dels components invariants.

TEOREMA 10 (CLASSIFICACIÓ DE COMPONENTS DE FATOU). *Sigui  $U$  un component estable de  $f$  de període  $p$ . Aleshores,*

- (a)  *$U$  és part d'una conca d'atracció d'una òrbita periòdica atractora, és a dir,  $f|_U^{pn} \rightarrow z_0 \in U$ , amb  $|(f^p)'(z_0)| < 1$ ; o bé*
- (b)  *$U$  és part d'una conca d'atracció d'una òrbita periòdica parabòlica, és a dir,  $f|_U^{pn} \rightarrow z_0 \in \partial U$ , amb  $|(f^p)'(z_0)| = 1$ ; o bé*
- (c)  *$U$  és un domini de rotació, és a dir, els iterats  $f^{pn}$  són conformement conjugats a una rotació rígida  $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}$ , amb  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . En aquest cas  $U$  només pot ser simplement connex (disc de Siegel) o doblement connex (anell de Herman).*

Fatou i Julia es basaren en la teoria de Montel per establir aquest teorema de classificació, mitjançant un estudi exhaustiu de les possibles funcions límit de famílies normals d'iterats. Malgrat aquest avenç, no van saber determinar si totes elles en realitat existien. No va ser fins al 1942 [32] que Siegel va demostrar l'existència de discs de rotació i fins al 1979 [15] que Herman va fer el mateix amb els anells que avui porten el seu nom. Aquest és un dels punts en què la dinàmica connecta amb l'aritmètica, en la cerca de les condicions sobre el número de rotació  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  que assegurin la presència d'aquests objectes. Val a dir que les condicions òptimes són encara avui un problema no resolt que ha estat central al treball de matemàtics com Jean-Christophe Yoccoz [37, 36] o Ricardo Pérez-Marco [27, 28], entre d'altres.

Un cop establerta la classificació dels components (pre)periòdics, va romandre obert durant uns seixanta anys més el problema de la possible existència de dominis errants per a funcions racionals, amb resposta incerta des que Noel Baker el 1976 va trobar la primera funció holomorfa (no racional) amb un domini errant [5]. Com ja hem mencionat anteriorment, va ser al voltant dels anys vuitanta que Dennis Sullivan va adonar-se que les deformacions quasiconformes, ja presents a la teoria de grups kleinians, podien ser utilitzades per provar el resultat que tancaria la conjectura de Fatou i que avui es coneix com a teorema de no existència de dominis errants (*no wandering domains theorem* en anglès) o simplement com a *teorema de Sullivan*.

TEOREMA 11 (NO EXISTÈNCIA DE DOMINIS ERRANTS, 1985 [33]). *Sigui  $f$  una funció racional i  $U$  un component de  $F(f)$ . Aleshores  $U$  és periòdica o preperiòdica, és a dir, existeixen  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $n \neq m$ , tals que  $f^n(U) = f^m(U)$ .*

Amb els mateixos arguments, Sullivan redemostrava també el teorema de finitud d'Ahlfors, i obria la connexió entre la teoria de grups kleinians i la dinàmica holomorfa.

## 4 Deformacions quasiconformes i la demostració de Sullivan

### 4.1 Funcions quasiconformes i coeficients de Beltrami

Com hem vist a la definició 4, la quasiconformitat representa una versió més feble de la conformitat; tal com s'ha comentat, les funcions conformes conser-

ven els angles, mentre que les funcions quasiconformes els poden distorsionar, tot i que de manera limitada. Són homeomorfismes no necessàriament diferenciables, tot i que ho són en gairebé tot punt. Malgrat aquesta limitació, molts teoremes sobre funcions conformes, quan són expressats adequadament, mantenen la validesa per a funcions quasiconformes.

El coeficient de Beltrami és una eina clau per a l'estudi d'homeomorfismes quasiconformes.

DEFINICIÓ 12 (COEFICIENT DE BELTRAMI). Sigui  $\mu: U \rightarrow \mathbb{C}$  una funció mesurable. Diem que  $\mu$  és un  $k$ -coeficient de Beltrami en  $U$  si

$$\|\mu(z)\|_\infty \leq k < 1 \quad \text{gairebé per a tot } z \in U.$$

Diem que  $\mu$  és un coeficient de Beltrami si  $\mu$  és un  $k$ -coeficient de Beltrami per a algun  $k < 1$ . Dos coeficients de Beltrami en  $U$  són equivalents si coincideixen en gairebé tot punt de  $U$ .

PROPOSICIÓ 13 (QUASICONFORMITAT I COEFICIENT DE BELTRAMI). *Un homeomorfisme  $\phi: U \rightarrow V$  entre dos oberts de  $\mathbb{C}$  que preserva l'orientació és  $K$ -quasiconforme si i només si  $\phi$  té derivades generalitzades (en el sentit de les distribucions) a  $L^2_{loc}$  i*

$$\mu_\phi(u) := \frac{\partial_{\bar{z}}\phi(u)}{\partial_z\phi(u)}$$

*és un  $k$ -coeficient de Beltrami amb  $k = \frac{1-K}{1+K}$ .*

Si  $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$  és una funció que té derivades  $L^2_{loc}$  i  $\partial_{\bar{z}}\phi(u)/\partial_z\phi(u)$  és un  $k$ -coeficient de Beltrami (però potser  $\phi$  no és un homeomorfisme amb la imatge), diem que  $\phi$  és una funció  $K$ -quasiregular.

D'alguna manera,  $\mu_\phi(u)$  mesura com de lluny es troba  $\phi$  de ser una funció conforme en el punt  $u$  i, per tant, de preservar angles —observem que les equacions de Cauchy Riemann  $\partial_{\bar{z}}\phi(u) = 0$  correspondrien a  $\mu(u) = 0$ .

Vegem a continuació com els coeficients de Beltrami poden ser transportats mitjançant les funcions quasiregulars. Aquesta operació s'anomena *transport enrere* (pullback en anglès).

DEFINICIÓ 14 (TRANSPORT ENRERE I INVARIÀNCIA). Donat un coeficient de Beltrami  $\mu$  en  $V$  i una funció quasiregular  $f: U \rightarrow V$ , definim el transport enrere de  $\mu$  per  $f$  com el coeficient de Beltrami definit a  $U$  per

$$f^*\mu(u) = \frac{\partial_{\bar{z}}f(u) + \mu(f(u))\overline{\partial_zf(u)}}{\partial_zf(u) + \mu(f(u))\overline{\partial_{\bar{z}}f(u)}}.$$

Diem que  $\mu$  és  $f$ -invariant si  $f^*\mu = \mu$ , entès com que  $\mu(u) = f^*\mu(f(u))$  gairebé per a tot  $u \in U$ .

Observem que, en el llenguatge dels *pullbacks*, el coeficient de Beltrami  $\mu_\phi$  definit per la funció  $\phi$  s'escriu com

$$\mu_\phi = \phi^* \mu_0,$$

on  $\mu_0 \equiv 0$  és el que s'anomena *estructura complexa estàndard*. Es dedueix del lema de Weyl [2, 19] que una funció  $f$  quasiregular és holomorfa si i només si  $f^* \mu_0 = \mu_0$ .

DEFINICIÓ 15 (EQUACIÓ DE BELTRAMI I INTEGRACIÓ). Donat un coeficient de Beltrami  $\mu$ , l'equació en derivades parcials

$$\partial_z \phi = \mu(z) \partial_z \phi$$

es coneix com a *equació de Beltrami*. *Integrar*  $\mu$  vol dir trobar una funció quasiconforme  $\phi$  que resolgui l'equació de Beltrami o, equivalentment, trobar  $\phi$  tal que  $\mu_\phi = \mu = \phi^* \mu_0$ , en què recordem que totes aquestes igualtats han de complir-se gairebé per a tot punt.

Els coeficients de Beltrami tenen una interpretació geomètrica: pensem que  $\mu(z)$  codifica la informació d'una el·lipse infinitesimal tangent a  $z$  (mòdul reescalament), de manera que  $\mu$  és un camp mesurable d'el·lipses tangents a un obert  $U$ , definit gairebé pertot, i les excentricitats són uniformement acotades. Una aplicació quasiconforme  $f: U \rightarrow V$  és derivable gairebé pertot i la seva diferencial pot utilitzar-se per fer el transport enrere de cada una de les el·lipses infinitesimals tangents a un punt de  $V$ , i obtenir un nou camp d'el·lipses tangents a  $U$ . L'estructura complexa estàndard  $\mu_0 \equiv 0$  correspon a un camp de cercles i tota aplicació holomorfa *preserva*  $\mu_0$ , és a dir, porta cercles infinitesimals a cercles infinitesimals. Es pot veure, doncs, que un coeficient de Beltrami indueix una estructura complexa a l'obert  $U$  (o en una superfície de Riemann, si es defineixen apropiadament). No entrarem en detall en aquesta direcció i remetem el lector a [10].

El famós teorema d'integrabilitat o *measurable Riemann mapping theorem* (MRMT) demostrat per Morrey, Bojarski, Ahlfors i Bers [26, 9, 3] ens diu que tots els  $k$ -coeficients de Beltrami són integrables.

TEOREMA 16 (TEOREMA D'INTEGRABILITAT O MRMT). *Sigui  $\mu$  un  $k$ -coeficient de Beltrami en  $U$ , per a algun  $k < 1$ , on  $U = \mathbb{C}$  (resp.  $U = \hat{\mathbb{C}}$  o  $U \simeq \mathbb{D}$ ). Aleshores existeix una funció quasiconforme  $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$  (resp.  $\phi: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  o  $\phi: U \rightarrow \mathbb{D}$ ) tal que  $\mu_\phi = \mu$  gairebé pertot. A més, qualsevol altra  $\psi$  que compleixi  $\mu_\psi = \mu$  és de la forma  $\psi = f \circ \phi$ , on  $f$  és un isomorfisme conforme de  $\mathbb{C}$  (resp. de  $\hat{\mathbb{C}}$  o  $\mathbb{D}$ ).*

Fem notar el perquè del nom d'aquest teorema observant que si  $\mu = \mu_0 \equiv 0$ , i  $U$  és conformement equivalent al disc (és a dir,  $U \not\subseteq \mathbb{C}$  simplement connex), aleshores la funció quasiconforme  $\phi: U \rightarrow \mathbb{D}$  que ens dona el teorema compleix que  $\phi^* \mu_0 = \mu_0$  i, per tant, és conforme pel lema de Weyl. En altres paraules,  $\phi$  és exactament la funció de Riemann que envia  $U$  al disc unitat. Val a dir, per acabar, que la definició dels coeficients de Beltrami a l'esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  (o en una superfície de Riemann general) requereix l'ús de cartes i de la notació adequada (vegeu, per exemple, [12, capítol 13] o [10, secció 1.3.7]).

### 4.2 L'espai de deformacions quasiconformes

En aquesta secció construïm espais de deformacions quasiconformes tant per a funcions racionals com per a grups kleinians.

Donada una funció racional  $f$ , diem que  $g$  és una *deformació quasiconforme* de  $f$  si  $g$  és també una funció racional *conjugada* a  $f$  mitjançant una aplicació quasiconforme, és a dir, si existeix una funció quasiconforme  $\phi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tal que

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

Al conjunt de deformacions de  $f$ , introduïm una relació d'equivalència definita que  $g_1 \sim g_2$  si  $g_1 = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$  i  $g_2 = \phi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1}$  són conjugades per una aplicació conforme, és a dir, si  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  és conforme.

Anàlogament, donat un grup kleinianà  $\Gamma$  finitament generat, diem que  $\Gamma'$  és una deformació quasiconforme de  $\Gamma$  si també és un grup kleinianà i tot element  $\gamma' \in \Gamma'$  és conjugat a algun element  $\gamma \in \Gamma$  mitjançant un homeomorfisme quasiconforme, que no depèn de  $\gamma'$ . Equivalentment, existeix un homeomorfisme quasiconforme  $\phi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tal que, per a tot  $\gamma' \in \Gamma'$ ,

$$\gamma' = \phi \circ \gamma \circ \phi^{-1} \tag{1}$$

per a algun  $\gamma \in \Gamma$ . Observem que n'hi ha prou que aquesta condició es compleixi per als generadors del grup i que  $\Gamma'$  ha de tenir el mateix nombre de generadors que  $\Gamma$ . De la mateixa manera que en el cas racional, dues deformacions  $\Gamma'$  i  $\Gamma''$  són equivalents si aquestes són conformement conjugades, o si ho són les aplicacions quasiconformes que les defineixen.

Les demostracions dels dos teoremes que ens ocupen (el teorema de finitud d'Ahlfors i el de no existència de dominis errants de Sullivan) es basen en l'anàlisi de l'espai de deformacions quasiconformes  $\text{Def}(f)$  d'una funció racional  $f$ , o d'un grup kleinianà  $\Gamma$ ,  $\text{Def}(\Gamma)$ , mòdul la relació d'equivalència que hem descrit.

Per entendre millor les propietats d'aquests espais, és convenient adonar-se que el teorema d'integrabilitat ens permet reformular-ne la definició. En efecte, suposem que tenim un coeficient de Beltrami  $\mu$  a  $\hat{\mathbb{C}}$  que és  $f$ -invariant, és a dir, que  $f^*\mu = \mu$ . Aplicant el teorema d'integrabilitat, obtenim una funció quasiconforme  $\phi$  tal que  $\mu = \mu_\phi$ , o, equivalentment, tal que  $\phi^*\mu_0 = \mu$ . Si ara definim la funció  $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ , veiem que  $g$  és quasiconforme i que

$$g^*\mu_0 = (\phi^{-1})^*(f^*(\phi^*\mu_0)) = (\phi^{-1})^*(f^*\mu) = (\phi^{-1})^*\mu = \mu_0,$$

de la qual cosa deduïm, pel lema de Weyl, que  $g$  és holomorfa, i, per tant, racional. Això ens diu que existeix una bijecció entre  $\text{Def}(f)$  i els  $k$ -coeficients de Beltrami  $f$ -invariants, amb  $k < 1$ , és a dir,

$$\mathcal{B}_1(f) = \{\text{coeficients de Beltrami } \mu \in L^\infty \text{ } f\text{-invariants amb } \|\mu\|_\infty < 1\}.$$

Això ens permet dotar l'espai  $\text{Def}(f)$  d'una estructura de varietat complexa, ja que  $\mathcal{B}_1(f)$  és la bola unitat de l'espai de Banach de  $k$ -coeficients de Beltrami  $f$ -invariants, equipat amb la norma infinit.

En el cas d'un grup kleinià  $\Gamma$ , per entendre l'espai de deformacions quasi-conformes  $\text{Def}(\Gamma)$  definit per (1) podem fer servir coeficients de Beltrami i el teorema d'integrabilitat. Concretament, triem coeficients de Beltrami  $\mu \in L^\infty(\widehat{\mathbb{C}})$  invariants per  $\Gamma$ :  $\gamma^*\mu = \mu$  per a tot  $\gamma \in \Gamma$ . D'aquesta manera garantim que si  $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  és una aplicació quasiconforme amb coeficient de Beltrami  $\mu$ , és a dir, compleix  $\partial_z \phi = \mu(z) \partial_z \phi$ , aleshores  $\phi \circ \Gamma \circ \phi^{-1}$  és un grup discret de Möbius, és a dir,  $\phi \circ \Gamma \circ \phi^{-1} \in \text{Def}(\Gamma)$ .

### 4.3 Idea de la demostració dels dos teoremes

En aquesta secció exposem la idea de la demostració de Sullivan, que serveix per als dos teoremes, i veiem com s'aplica en cada cas.

Comencem pel teorema de no existència de dominis errants. Sigui  $f$  una funció racional de grau  $d \geq 2$ . Recordem que un domini errant per  $f$  és un component de Fatou  $U$  tal que  $f^n(U) \neq f^m(U)$  per a qualsevol  $m \neq n$ . Observem primer que  $\text{Rat}_d$ , l'espai de funcions racionals de grau  $d$ , pot ser identificat (via els coeficients i certes normalitzacions) amb  $\mathbb{C}^{2d+1}$ , és a dir, amb un espai vectorial complex de dimensió finita.

Suposem ara que  $U$  és un component errant de  $F(f)$ . Aleshores, Sullivan demostra que existeix un espai de coeficients de Beltrami «no equivalents» amb suport a  $U$ , de dimensió arbitràriament alta. Hom pot fer servir  $f$  per estendre aquests coeficients a tot  $F(f)$  de manera compatible amb la dinàmica, i de fet a tot  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Això permet aplicar el teorema d'integrabilitat MRMT (teorema 16) per obtenir un espai de deformacions quasiconformes de  $f$  no equivalents entre elles de dimensió arbitrària, i, per tant, un subespai de  $\text{Rat}_d$  de dimensió tan gran com vulguem, la qual cosa és una contradicció.

A continuació considerem  $\Gamma$  un grup kleinià amb un nombre finit de generadors. En aquest cas volem explicar la demostració de Sullivan de la proposició 7: volem veure que, per a tot component connex  $\Omega_0 \subset \Omega(\Gamma)$  del domini de discontinuïtat, el conjunt límit de l'estabilitzador  $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\Omega_0 = \Omega_0\}$  és tota la frontera  $\partial\Omega_0$ . Anàlogament al cas de funcions racionals de grau donat, l'espai de deformacions quasiconformes de  $\Gamma$ ,  $\text{Def}(\Gamma)$ , té dimensió finita. El motiu és que  $\text{Def}(\Gamma)$  és un subconjunt de l'espai de representacions  $\text{hom}(\Gamma, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$ , que és un conjunt algebraic de dimensió finita quan  $\Gamma$  és finitament generat (un morfisme de  $\Gamma$  a  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  està determinat per la imatge dels generadors, és a dir, per un nombre finit de matrius de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  [4, 17]).

Per contradicció, suposem que el conjunt límit de  $\Gamma_0$  no és tota la frontera de  $\Omega_0$ ,  $\Lambda(\Gamma_0) \neq \partial\Omega_0$ . Com que  $\Lambda(\Gamma_0)$  és tancat, existeix un subconjunt obert  $V \subset \widehat{\mathbb{C}}$  amb  $V \cap \partial\Omega_0 \neq \emptyset$  i  $V \cap \Lambda(\Gamma_0) = \emptyset$ . De manera anàloga al teorema de components no errants, Sullivan construeix un espai de coeficients de Beltrami de dimensió infinita que són  $\Gamma$ -equivariants. El fet que l'obert  $V$  sigui disjunt del conjunt límit de  $\Gamma_0$  permet escollir els coeficients de Beltrami que s'anul·lin en  $V \cap \Omega_0$ . Per tant, la integració d'aquests coeficients són funcions holomorfes a  $V \cap \Omega_0$ , i això ens permet construir coeficients que, quan els integrem, difereixen a  $V \cap \partial\Omega_0$ . D'aquesta manera es construeix un espai de

funcions quasiconformes de dimensió infinita,  $\dim(\text{Def}(\Gamma)) = \infty$ , i s'obté una contradicció.

Adicionalment, observem que, com que la dimensió de  $\text{Def}(\Gamma)$  és finita, si  $\Omega/\Gamma$  tingués un nombre infinit de components connexos, aleshores gairebé tots haurien de ser rígids, és a dir, tenir espai de deformacions trivials. Les úniques superfícies de Riemann rígides de tipus finit són esferes sense tres punts, i Greenberg donà un argument algebraic per veure que n'hi ha un nombre finit a  $\Omega/\Gamma$  [14].

Per a una demostració rigorosa de cada un dels teoremes podem consultar [33], o també [1, 8, 21, 10, 17].

#### 4.4 El diccionari de Sullivan

Al final de l'article, Sullivan observa que els dos teoremes són dos resultats de finitud en sistemes dinàmics conformes basats en el teorema d'integrabilitat o *measurable Riemann mapping theorem*. Però l'analogia va més lluny i en un article posterior a *Acta Mathematica* [34] aplica idees de funcions holomorfes i dinàmica de [20] per a l'estudi de grups kleinians.

El lector deu haver observat la semblança de les figures de conjunts límit de grups kleinians i conjunts de Julia d'aplicacions racionals. No només s'assemblen visualment, sinó que comparteixen propietats com ara ser tancats i perfectes. A la introducció del mateix article de què estem parlant [33], Sullivan remarca aquesta i altres semblances i formula un «diccionari». El diccionari proposa l'analogia entre una transformació racional  $f$  de grau  $d \geq 2$  i un grup kleinianà no elemental  $\Gamma$  de  $n$  generadors. En el primer cas, l'espai de deformacions de  $f$  té  $2d - 2$  paràmetres complexos; en el segon cas,  $\gamma$  en té  $3n - 3$ . El conjunt de Julia  $J(f)$  es correspon al conjunt límit  $\Lambda(\Gamma)$  i comparteixen la propietat abans esmentada de ser tancats i perfectes. El conjunt de Fatou  $F(f)$  i el domini de discontinuïtat  $\Omega(\Gamma)$  també es corresponen en aquest diccionari, i comparteixen el fet que tant el nombre de components connexos de  $F(f)$  com el  $\Omega(\Gamma)$  poden ser 0, 1, 2 o  $\infty$ . Els dos teoremes, el de finitud d'Ahlfors i el de no existència de dominis errants de Sullivan, formen una analogia al diccionari. El diccionari és molt més llarg i ha evolucionat amb el temps des de la proposta original; el lector interessat pot consultar, per exemple, [10] o [25].

Per acabar, esperem haver justificat amb un exemple el que diu la darrera frase de la citació del premi Abel sobre Dennis Sullivan: «his capacity to see analogues between diverse areas of mathematics and build bridges between them, has forever changed the field».

#### Referències

- [1] AHLFORS, L. V. «Finitely generated Kleinian groups». *Amer. J. Math.*, 86 (1964), 413–429.
- [2] AHLFORS, L. V. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. 2a ed. Amb capítols suplementaris de C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura i J. H. Hubbard.

- Providence, RI: American Mathematical Society, 2006. (Univ. Lecture Ser.; 38)
- [3] AHLFORS, L.; BERS, L. «Riemann's mapping theorem for variable metrics». *Ann. of Math. (2)*, 72 (1960), 385-404.
- [4] ANDERSON, J. W. «A brief survey of the deformation theory of Kleinian groups». A: *The Epstein birthday schrift*. Coventry: Geometry & Topology Publications, 1998, 23-49. (Geom. Topol. Monogr.; 1)
- [5] BAKER, I. N. «An entire function which has wandering domains». *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 22 (2) (1976), 173-176.
- [6] BAYER, P. «Les contributions de Poincaré a l'aritmètica». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 21 (1) (2006), 5-38.
- [7] BEARDON, A. F. *Iteration of Rational Functions. Complex Analytic Dynamical Systems*. Nova York: Springer-Verlag, 1991. (Grad. Texts in Math.; 132)
- [8] BERS, L. «On Sullivan's proof of the finiteness theorem and the eventual periodicity theorem». *Amer. J. Math.*, 109 (5) (1987), 833-852.
- [9] BOYARSKIÏ, B. V. «Homeomorphic solutions of Beltrami systems». *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 102 (1955), 661-664. (En rus)
- [10] BRANNER, B.; FAGELLA, N. *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. (Cambridge Stud. Adv. Math.; 141)
- [11] CARLESON, L.; GAMELIN, T. W. *Complex Dynamics*. Nova York: Springer-Verlag, 1993. (Universitext Tracts Math.)
- [12] DONALDSON, S. *Riemann Surfaces*. Oxford: Oxford University Press, 2011. (Oxf. Grad. Texts Math.; 22)
- [13] FATOU, P. «Sur les équations fonctionnelles». *Bull. Soc. Math. France*, 47 (1919), 161-271.
- [14] GREENBERG, L. «On a theorem of Ahlfors and conjugate subgroups of Kleinian groups». *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 56-68.
- [15] HERMAN, M.-R. «Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 49 (1979), 5-233.
- [16] JULIA, G. «Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles». *J. Math. Pures Appl. (8)*, 1 (1918) 47-245.
- [17] KAPOVICH, M. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 2001. (Progr. Math.; 183)
- [18] KLEIN, F. «Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie». *Math. Ann.*, 21 (2) (1883), 141-218.
- [19] LEHTO, O.; VIRTANEN, K. I. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. 2a ed. Traduït de l'alemany per K. W. Lucas. Nova York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1973. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 126)
- [20] MAÑÉ, R.; SAD, P.; SULLIVAN, D. «On the dynamics of rational maps». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16 (2) (1983), 193-217.



- [21] MCMULLEN, C. T.; SULLIVAN, D. P. «Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system». *Adv. Math.*, 135 (2) (1998), 351–395.
- [22] MILNOR, J. *Dynamics in One Complex Variable*. 3a ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006. (Ann. of Math. Stud.; 160)
- [23] MJ, M. «Cannon-Thurston maps for surface groups». *Ann. of Math. (2)*, 179 (1) (2014), 1–80.
- [24] MONTEL, P. «Sur les familles complexes et leurs applications». *Acta Math.*, 49 (1-2) (1926), 115–161.
- [25] MOROSAWA, S.; NISHIMURA, Y.; TANIGUCHI, M.; UEDA, T. *Holomorphic Dynamics*. Traduit de l'original japonès de 1995 i revisat pels autors. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Stud. Adv. Math.; 66)
- [26] MORREY, C. B., JR. «On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43 (1) (1938), 126–166.
- [27] PÉREZ MARCO, R. «Sur la structure des germes holomorphes non linéarisables». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312 (7) (1991), 533–536.
- [28] PÉREZ-MARCO, R. «Fixed points and circle maps». *Acta Math.*, 179 (2) (1997), 243–294.
- [29] POINCARÉ, H. «Théorie des groupes fuchsien». *Acta Math.*, 1 (1) (1882), 1–76.
- [30] POINCARÉ, H. «Mémoire sur les groupes kleinéens». *Acta Math.*, 3 (1) (1883), 49–92.
- [31] SCHOTTKY, F. «Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen». *J. Reine Angew. Math.*, 83 (1877), 300–351.
- [32] SIEGEL, C. L. «Iteration of analytic functions». *Ann. of Math. (2)*, 43 (1942), 607–612.
- [33] SULLIVAN, D. «Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains». *Ann. of Math. (2)*, 122 (3) (1985), 401–418.
- [34] SULLIVAN, D. «Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups». *Acta Math.*, 155 (3-4) (1985), 243–260.
- [35] THURSTON, W. P. «Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6 (3) (1982), 357–381.
- [36] YOCCOZ, J.-C. «Structure des orbites de homéomorphismes analytiques posédant un point critique». [Inèdit]
- [37] YOCCOZ, J.-C. «Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}, 0)$ ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 306 (1) (1988), 55–58.

NÚRIA FAGELLA  
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA  
UNIVERSITAT DE BARCELONA  
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585  
08007 BARCELONA  
I CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA  
EDIFICI C, CAMPUS DE LA UAB  
08193 BELLATERRA (CERDANYOLA DEL VALLÈS)  
nfagella@ub.edu

JOAN PORTI  
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES  
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA  
I CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA  
EDIFICI C, CAMPUS DE LA UAB  
08193 BELLATERRA (CERDANYOLA DEL VALLÈS)  
joan.porti@uab.cat

# Grafs aleatoris amb una seqüència de graus donada

GUILLEM PERARNAU

**Resum:** Des de l'aparició de la noció de xarxes complexes, els grafs aleatoris han resultat una eina fonamental per modelar-les i estudiar-les. En aquest article tractarem l'estudi dels grafs aleatoris amb una seqüència de graus donada, en què el grau de cada vèrtex és fixat *a priori* per després triar una instància aleatòria que respecti aquestes restriccions. El nostre objectiu és introduir en aquest tema el lector que no hi està familiaritzat, enunciant els resultats més rellevants en l'àrea i explicant perquè són certs, sense donar-ne proves rigoroses.

**Paraules clau:** grafs aleatoris, seqüència de graus, models per a xarxes complexes, components connexes, distàncies en grafs, enumeració de grafs, mostreig de grafs aleatoris.

**Classificació MSC2020:** 05C80, 05C82.

## 1 Introducció

Els grafs aleatoris són estructures combinatòries discretes que des del seu naixement han trobat nombroses aplicacions en una àmplia gamma de disciplines científiques, des de la informàtica i les matemàtiques fins a la biologia i les ciències socials. Originats en el treball seminal d'Erdős i Rényi a la dècada de 1960, la teoria dels grafs aleatoris ha evolucionat, fins a transformar-se en un camp ric, divers i en constant creixement i esdevenir una eina fonamental per estudiar diversos fenòmens en la ciència moderna.

Recentment, l'estudi dels grafs aleatoris s'ha lligat de manera més estreta a l'anàlisi de les xarxes complexes. Les *xarxes complexes* modelen sistemes caracteritzats per elements interconnectats (nodes connectats a través d'arestes), i apareixen en dominis diversos com ara les xarxes socials, les xarxes biològiques, les xarxes neuronals, les xarxes de transport o les xarxes de la informació (Internet, 5G, etc.). Els desenvolupaments tecnològics de les últimes dècades ens han proporcionat la capacitat computacional per processar aquestes xarxes de mida ingent, i han fet palesa la necessitat creixent de comprendre-les des del punt de vista teòric. Això ha plantejat l'ambiciós repte de desenvolupar i analit-

zar models de xarxes que encaixin amb el que s'observa a la realitat. La teoria dels grafs aleatoris ofereix un marc idoni per a aquest objectiu, permetent-nos extreure informació sobre les seves propietats estructurals, estudiar-ne l'evolució dinàmica o mesurar la robustesa davant de pertorbacions.

Objectes de definició senzilla, com ara el graf aleatori binomial, proporcionen un model bàsic inicial per a les xarxes complexes. Tot i la seva simplicitat, aquest model mostra una riquesa estructural extraordinària, capturant, per exemple, dos fenòmens com són l'existència de transicions de fase en l'estructura de les components connexes, o la propietat petit-món (*small-world* en anglès), que assegura que qualsevol parell de vèrtexs es poden connectar a través de la xarxa amb pocs passos. No obstant això, aquest model no aconsegueix capturar algunes de les altres propietats essencials que apareixen en les xarxes del món real, com ara l'heterogeneïtat o les correlacions entre arestes (*clustering*). De fet, les xarxes que trobem al món real exhibeixen una topologia tan rica i diversa que té poc sentit intentar construir un sol objecte que les modeli a totes. Per exemple, les propietats d'una xarxa social com Instagram tenen poques coses en comú amb les de les xarxes elèctriques, fortament marcades per les restriccions geogràfiques. Això justifica la necessitat d'introduir nous models, més sofisticats que el del graf aleatori binomial, que donen lloc a una àrea de recerca nova i dinàmica en la intersecció de la física estadística, la informàtica teòrica i les matemàtiques.

En aquest article ens centrarem en l'objectiu d'introduir heterogeneïtat als models de xarxes, i ho farem a través de la noció de grau. El grau d'un node en una xarxa és el nombre de nodes als quals està connectat. Per exemple, en una xarxa social el grau d'una persona (representada per un node) és el nombre d'amics d'aquesta persona en la xarxa. És ben sabut que la majoria de xarxes exhibeixen seqüències de graus particulars o amb fortes propietats estructurals. Un exemple és l'existència de *nodes concentradors* (*hubs* en anglès), nodes de la xarxa que tenen un grau molt superior a la resta; per exemple, Frankfurt és un hub a la xarxa de transport aeri. D'altra banda, hi ha xarxes en què la seqüència de graus segueix una certa llei de probabilitat; per exemple, a les xarxes anomenades *invariants d'escala* (*scale-free* en anglès), els graus segueixen una distribució de llei de potències.

Aquests exemples motiven la creació d'un model parametritzat pels graus dels seus nodes. És a dir, fixant els graus *a priori*, volem estudiar un graf aleatori cada vèrtex del qual tingui el grau que se li ha assignat. A aquest efecte, si volem generar un graf amb  $n$  vèrtexs, podem prendre una seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$  de longitud  $n$  i després prendre  $\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_{n, \mathbf{d}_n}$  que sigui un graf triat uniformement a l'atzar de  $\mathbb{G}_{n, \mathbf{d}_n}$ , el conjunt de tots els grafs amb  $n$  vèrtexs i seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$ . Aquest objecte combinatori s'anomena *graf aleatori amb una seqüència de graus donada* i serà el nostre principal objecte d'estudi.

Cal fer notar que aquest model no serà el més adequat per a xarxes que exhibeixen *clustering*, el fenomen que es dona quan els veïns d'un vèrtex tenen tendència a estar connectats. En tal cas, hi ha altres models aleatoris de xarxes, com els grafs geomètrics aleatoris o els grafs hiperbòlics aleatoris, que capturen aquest fenomen.

Per al lector interessat en l'evolució de la teoria de grafes i la seva relació amb els grafes aleatoris, referim a l'article de Rué [47]. D'altra banda, cal destacar que també hi ha models deterministes de xarxes complexes; vegeu Comellas [9].

### 1.1 Una primera mirada als grafes aleatoris

Tot i que aquest model dona una representació més realista de les xarxes complexes, la seva descripció en dificulta l'anàlisi teòrica. Abans de plantejar-nos com el podem estudiar des del formulisme matemàtic, discutirem els principals obstacles que presenta la definició del model i com superar-los.

Una primera opció per entendre aquest model és donar-hi un enfocament algorísmic i/o probabilístic: trobar un procediment que generi  $\mathbb{G}_n$  i que sigui prou simple per ser analitzat. Per exemple, el graf aleatori binomial es pot generar seleccionant independentment cada aresta amb probabilitat  $p$ , com veurem més endavant.

És temptador voler generar  $\mathbb{G}_n$  de la manera següent: començant amb el graf buit amb  $n$  vèrtexs, a cada pas, seleccionem «aleatòriament» dos vèrtexs diferents i no adjacents  $u, v$  tals que els seus graus actuals siguin més petits que els seus graus finals  $d_u, d_v$  i hi afegim una aresta que els connecti. Si un prova de fer-ho, ràpidament s'adonarà que aquest procediment podria quedar bloquejat abans de generar un graf amb la seqüència de graus desitjada, ja que totes les parelles de vèrtexs susceptibles de ser triades podrien ja estar unides per una aresta. I encara que el procés tingués èxit, podria ser que no es generessin tots els grafes de  $\mathcal{G}_{n,d_n}$  amb la mateixa probabilitat.

Podem modificar el procediment anterior seleccionant qualsevol  $u, v$ , sempre que els seus graus actuals siguin més petits que els seus graus finals, permetent llaços i arestes múltiples. Això es coneix com a *model de configuració* i s'introduirà en detall més endavant. Un algorisme senzill, conegut com a *mostreig per rebuig*, consisteix a executar repetidament aquest procediment fins que s'obté un graf simple (sense llaços ni arestes múltiples). Es pot provar que aquest algorisme de mostreig genera un graf final amb la distribució uniforme a  $\mathcal{G}_{n,d_n}$ . Addicionalment, si la seqüència de graus té determinades bones propietats, el procediment aleatori és computacionalment eficient.

Una segona opció és donar-hi un enfocament combinatori. Com que estem considerant un model uniforme, per a qualsevol propietat del graf, la probabilitat que  $\mathbb{G}_n$  tingui aquesta propietat és la raó entre el nombre de grafes a  $\mathcal{G}_{n,d_n}$  que satisfan aquesta propietat i el nombre total de grafes a  $\mathcal{G}_{n,d_n}$ . Aquesta idea és força útil en models com el graf aleatori d'Erdős-Rényi  $\mathbb{G}_{n,m}$ , on el nombre d'arestes  $m$  es fixa com a paràmetre del model. Estimar el nombre de grafes amb una seqüència de graus donada que satisfacin una determinada propietat no és una tasca fàcil. De fet, determinar  $|\mathcal{G}_{n,d_n}|$  és un problema famós en enumeració que encara no està completament resolt i que tractarem a la part final d'aquest article. Tot i això, resulta que es pot aproximar la raó entre aquests dos conjunts utilitzant un senzill truc de doble recompte.

Per tant, un dels principals obstacles en l'estudi de  $\mathbb{G}_n$  és la manca d'un bon model. Tot i que els enfocaments algorísmic, probabilístic i combinatori

més simples tenen moltes limitacions, veurem com es poden modificar per permetre l'anàlisi d'aquests grafs aleatoris.

## 1.2 Contingut i organització

En aquest article donarem una visió general sobre els grafs aleatoris amb una seqüència de graus donada, que d'ara endavant anomenarem simplement *grafs aleatoris*.

L'article s'estructura de la manera següent. Dediquem primer la secció 2 a introduir la notació bàsica en teoria de grafs, probabilitat, asimptòtica i grafs aleatoris que farem servir al llarg de l'article. La secció 3 introdueix el model de configuració, un model molt útil per estudiar grafs aleatoris amb poques arestes. En aquesta secció parlarem de les condicions suficients sobre la seqüència de graus per tal que el graf generat sigui simple amb una probabilitat positiva. Continuem a la secció 4 establint la connexió entre els veïnatges locals en un graf aleatori i els processos de ramificació. A la secció 5 discutim l'estructura de les components connexes del graf aleatori, introduint el criteri de Molloy-Reed i cobrint temes com la percolació i la connectivitat. La secció 6 està dedicada a l'estudi de les distàncies en grafs aleatoris. Finalment, la secció 7 tracta sobre grafs aleatoris amb moltes arestes, introduint el mètode de commutació (*switching* en anglès) i discutint-ne les aplicacions a l'enumeració i al mostreig.

El nostre objectiu és proporcionar una bona intuïció sobre els resultats més rellevants en la literatura. En aquest article no donarem proves d'aquests resultats, però hi ha diverses revisions i llibres que inclouen demostracions del contingut que es presenta aquí i resultats addicionals. Consulteu, per exemple, les referències següents: model de configuració [21, 26], estructura de components connexes i distàncies [27], subgrafs [40], enumeració [52], mostreig [23].

D'altra banda, aquests grafs aleatoris han atret l'atenció de bona part de la comunitat científica per la seva versatilitat a l'hora de modelar xarxes. Actualment es fan servir per a tot tipus de xarxes en què la informació sobre els graus es pot extreure empíricament d'unes dades. La *teoria de xarxes complexes* és una branca de la física estadística que es dedica a interpretar aquestes xarxes des d'un punt de vista físic i es basa en anàlisis heurístiques i simulacions numèriques sobre models de grafs aleatoris com el que estudiarem en aquest article. Podeu consultar els articles d'Albert i Barabási [1] o de Newman [45] per entendre els grafs aleatoris des d'aquest punt de vista, així com per trobar-hi nombrosos exemples d'aplicacions concretes.

Finalment, en aquest article no ens centrarem en famílies específiques de seqüències de graus, sinó que tractarem les seqüències al nivell més general possible. Per tal de fer-ho, identificarem un conjunt comú d'hipòtesis (vegeu la hipòtesi A) sota les quals es poden enunciar la majoria dels resultats, amb l'excepció dels resultats de la secció 7, i destacarem i justificarem l'ús de condicions addicionals sempre que sigui necessari. Els lectors interessats en famílies particulars de seqüències de graus, els remetem a l'article de Wormald [51] per a seqüències regulars, i als llibres de van der Hofstad [26, 27] per a seqüències de graus que segueixen una llei de potència.

## 2 Notació

Abans de començar discutint els resultats sobre grafes aleatoris, introduïm la notació bàsica que farem servir en aquest article.

### 2.1 Grafes

Denotem amb  $G = (V, E)$  un graf amb conjunt de vèrtexs  $V = V(G)$  i conjunt d'arestes  $E = E(G) \subseteq \binom{V}{2}$ , un conjunt de parelles no ordenades d'elements de  $V$ . L'ordre del graf és  $v(G) = |V(G)|$  i la seva mida,  $e(G) = |E(G)|$ . Al llarg de l'article fem servir «:=» per denotar una definició usant una equació. Per a  $n \in \mathbb{N}$ , denotem  $[n] := \{1, \dots, n\}$ . Tots els grafes d'aquest article tenen conjunt de vèrtexs  $V(G) = [n]$  i parlem de *grafes etiquetats*, en els quals l'etiqueta d'un vèrtex és el valor  $j \in [n]$  que se li assigna. En particular,  $v(G) = n$  sempre que no es digui el contrari. Un *subgraf* de  $G$  és un graf  $H = (V_H, E_H)$  tal que  $V_H \subseteq [n]$  i  $E_H \subseteq \binom{V_H}{2} \cap E$  i ho denotem amb  $H \subseteq G$ . El *grau* d'un vèrtex  $v \in [n]$ ,  $d(v)$ , és el nombre d'arestes incidents a  $v$  en  $G$ .

Podem definir una *distància* sobre els vèrtexs de  $G$ . Donat  $v, w \in [n]$ , denotem amb  $\text{dist}(v, w)$  la longitud del camí més curt que uneix  $v$  i  $w$  en cas que existeixi, altrament  $\text{dist}(v, w) = \infty$ . El *diàmetre* d'un graf,  $\text{diam}(G)$ , es defineix com el màxim de les distàncies entre vèrtexs de  $G$ . Un graf és *connex* si per a tot  $v, w \in [n]$ ,  $\text{dist}(v, w) < \infty$ . Si un graf no és connex, aleshores té sentit parlar de les seves components connexes. La *component connexa* d'un vèrtex  $v$  és el subgraf maximal que conté tots els vèrtexs  $w$  tals que  $\text{dist}(v, w) < \infty$ . Denotem la component connexa més gran (en ordre) de  $G$  amb  $C_1(G)$ ; en cas d'haver-n'hi més d'una, escollim la que conté el vèrtex amb l'etiqueta més petita.

Per a  $h \in \mathbb{N}$ , definim el *h-veïnatge* i el *( $\leq h$ )-veïnatge* de  $v$ , respectivament, com

$$N_h(v) := \{w \in [n] : \text{dist}(v, w) = h\},$$

$$N_{\leq h}(v) := \{w \in [n] : \text{dist}(v, w) \leq h\}.$$

Denotarem amb  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  un *graf dirigit* (o *digraf*) amb conjunt de vèrtexs  $V = [n]$  i conjunt d'arcs  $\vec{E} = \vec{E}(G)$ , un conjunt de parelles *ordenades* d'elements de  $V$ . El *grau d'entrada* de  $v$ ,  $d^-(v)$ , és el nombre d'arcs  $(w, v) \in \vec{E}$  amb  $w \in [n]$ , i el *grau de sortida* de  $v$ ,  $d^+(v)$ , és el nombre d'arcs  $(v, w) \in \vec{E}$  amb  $w \in [n]$ . Podem definir una distància no simètrica a  $\vec{G}$ :  $\text{dist}(u, v)$  és la longitud del camí dirigit més curt que va des de  $v$  fins a  $w$  en cas que existeixi, altrament  $\text{dist}(v, w) = \infty$ . Definim la *component fortament connexa* de  $v \in [n]$  com el subdigraf maximal que conté els vèrtexs  $w \in [n]$  tal que  $\text{dist}(v, w) < \infty$  i  $\text{dist}(w, v) < \infty$ . Denotem la component fortament connexa més gran (en ordre) de  $\vec{G}$  amb  $C_1(\vec{G})$ ; en cas d'haver-n'hi més d'una, escollim la que conté el vèrtex amb l'etiqueta més petita.

Parlem de *multigrafes*  $G = (V, E)$  per denotar un graf en què  $E$  és un multiconjunt de parelles d'elements de  $V$  no necessàriament diferents. Si tenim una

aresta  $\{v, v\} \in E$ , aleshores diem que aquesta aresta és un *llaç* a  $v$ . Si tenim dues, tres o quatre arestes  $\{v, w\}$  a  $E$ , aleshores parlem d'una *aresta doble*, *triple* o *quàdruple*, respectivament; en general diem que és una *aresta múltiple*.

## 2.2 Probabilitat

Denotarem un *espai de probabilitat finita* amb  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , on  $\Omega$  és un conjunt finit,  $\mathcal{A}$  és una  $\sigma$ -àlgebra sobre  $\Omega$  i  $\mathbb{P}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció de probabilitat. Farem servir  $X$  per denotar una *variable aleatòria* en  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ,  $\mathbb{E}[X]$  per a la seva *esperança* i  $\text{Var}(X)$  per a la seva *variància*. Farem referència a alguna de les distribucions de probabilitat discreta més habituals, com la *distribució binomial*  $\text{Bin}(n, p)$ , on  $n \in \mathbb{N}$  i  $p \in [0, 1]$ , i la *Poisson*  $\text{Po}(\lambda)$ , on  $\lambda > 0$ . Usarem  $(X_t)_{t \geq 0}$  per denotar un *procés estocàstic* en  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Ens caldrà considerar seqüències d'espais de probabilitat finits  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on  $|\Omega_n| \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Per tal d'alleugerir la notació és estàndard usar  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n$  i així ho farem. Donada una seqüència d'esdeveniments  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $A_n \in \mathcal{A}_n$ , diem que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se satisfà *amb alta probabilitat (aap)* si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(A_n) = 1.$$

Donada una seqüència  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on  $X_n$  és una variable aleatòria definida a  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$  i  $X$  és una variable aleatòria definida a  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , diem que  $X_n$  *convergeix a  $X$  en distribució* (o  $X_n \xrightarrow{d} X$ ) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \text{per a tot } x \in \mathbb{R}.$$

D'altra banda, donada una constant  $c \in \mathbb{R}$ , diem que  $X_n$  *convergeix a  $c$  en probabilitat* (o  $X_n \xrightarrow{p} c$ ) si per a tot  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(|X_n - c| \geq \epsilon) = 0.$$

## 2.3 Notació asimptòtica

Per a  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , diem que  $f(n) = O(g(n))$  si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty,$$

i que  $f(n) = \Theta(g(n))$  si  $f(n) = O(g(n))$  i  $g(n) = O(f(n))$ .

Diem que  $f(n) = o(g(n))$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

en particular  $f(n) = o(1)$  denota que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ .



Finalment, diem que  $f(n) \sim g(n)$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Quan parlem de resultats asimptòtics sobre seqüències d'espais de probabilitat, farem servir expressions de l'estil « $f(n) = O(g(n))$  aap»; formalment això cal entendre-ho com: existeix una constant  $c > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(f(n) \leq cg(n)) = 1,$$

i similarment per a l'altra notació asimptòtica.

## 2.4 Grafes aleatoris

Una *seqüència de graus* de longitud  $n$  és una seqüència  $\mathbf{d}_n = (d_i)_{i \in [n]}$ , on  $d_i$  és un número enter positiu<sup>1</sup> amb  $d_i \leq n - 1$  per a tot  $i \in [n]$  i  $m_n := \sum_{i \in [n]} d_i$  és parell. Definim  $\Delta_n := \max_{i \in [n]} d_i$ .

Redefinim  $\mathcal{G}_{n, \mathbf{d}_n}$  com el conjunt de grafes amb conjunt de vèrtexs  $[n]$  i on el vèrtex  $i$  té grau  $d(i) = d_i$ . Una seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$  és *factible* si  $\mathcal{G}_{n, \mathbf{d}_n} \neq \emptyset$ . Donada una seqüència de graus factible  $\mathbf{d}_n$ , sigui  $\mathbb{G}_{n, \mathbf{d}_n}$  un graf triat uniformement a l'atzar de  $\mathcal{G}_{n, \mathbf{d}_n}$ . Anomenem  $\mathbb{G}_{n, \mathbf{d}_n}$  un *graf aleatori amb seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$* . Quan la seqüència de graus a la qual fem referència sigui clara pel context, escriurem simplement  $\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_{n, \mathbf{d}_n}$  i ens hi referirem com a *graf aleatori*. Donat  $d = d(n)$  amb  $1 \leq d \leq n - 1$ , un *graf aleatori  $d$ -regular*, denotat per  $\mathbb{G}_{n, d}$ , és el graf aleatori  $\mathbb{G}_n$  on  $d_i = d$  per a tot  $i \in [n]$ .

Una *seqüència de seqüències de graus* és una seqüència  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on per a cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{d}_n = (d_{n,i})_{i \in [n]}$  és una seqüència de graus de longitud  $n$ . Definim  $n_k = n_{n,k} := |\{i \in [n] \mid d_{n,i} = k\}|$  com el nombre de vèrtexs de grau  $k$  en  $\mathbf{d}_n$ . Donada  $\mathbf{d}$ , definim la *seqüència de grafes aleatoris*  $\mathbb{G}_{\mathbf{d}} = (\mathbb{G}_{n, \mathbf{d}_n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Al llarg de l'article, compararem el comportament del graf aleatori  $\mathbb{G}_n$  amb el del *graf aleatori binomial*,  $\mathbb{G}_{n,p}$ , el qual té el conjunt de vèrtexs  $[n]$  i en què cada aresta s'afegeix independentment amb probabilitat  $p \in [0, 1]$ . Sovint considerarem probabilitats  $p = p_n \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Finalment, per a  $m \in \{0, \dots, \binom{m}{2}\}$ , introduïm el *graf aleatori d'Erdős-Rényi*,  $\mathbb{G}_{n,m}$ , que és un graf triat uniformement de tots els grafes amb conjunt de vèrtexs  $[n]$  i  $m$  arestes. A la literatura, sovint s'anomena  $\mathbb{G}_{n,p}$  el graf aleatori d'Erdős-Rényi, fet que pot comportar una lleu confusió. Tot i que les definicions són diferents, si  $m = \binom{n}{2}p$ ,  $\mathbb{G}_{n,p}$  i  $\mathbb{G}_{n,m}$  es comporten de manera molt similar, d'aquí l'abús de notació.

<sup>1</sup> En general, les seqüències de graus poden contenir vèrtexs de grau zero. Tot i això, no tenen cap paper en l'estructura del graf aleatori i es poden eliminar de la seqüència de graus reduint a la vegada  $n$ , d'aquí l'assumpció.

### 3 El model de configuració

A la subsecció 1.1 hem proposat el següent algorisme per generar grafs amb la seqüència de graus donada: començant amb el graf buit, escollim dos vèrtexs a l'atzar que no tinguin el seu grau saturat i afegim una aresta entre ells. Aquest procediment sempre acaba, tot i que pot generar grafs que no són simples. Tot i això, la idea d'aparellar vèrtexs de dos en dos és molt útil, i és la base principal del model de configuració.

El *model de configuració* (també conegut com a *model d'aparellament*) amb seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$ , denotat per  $\mathbb{CM}_{n,\mathbf{d}_n}$  (o simplement  $\mathbb{CM}_n$  si la seqüència de graus és clara pel context) i introduït per Bollobás a [5] (vegeu també [3, 4, 49, 50]), és el multigraf aleatori amb conjunt de vèrtexs  $[n]$  que s'obté assignant  $d_i$  *semiarestes* a cada vèrtex  $i \in [n]$ , i després aparellant-les totes uniformement a l'atzar per crear les arestes (vegeu la figura 1). El nombre d'aparellaments que es poden realitzar és  $m_n!! := m_n(m_n - 2)(m_n - 4) \dots 2$ .

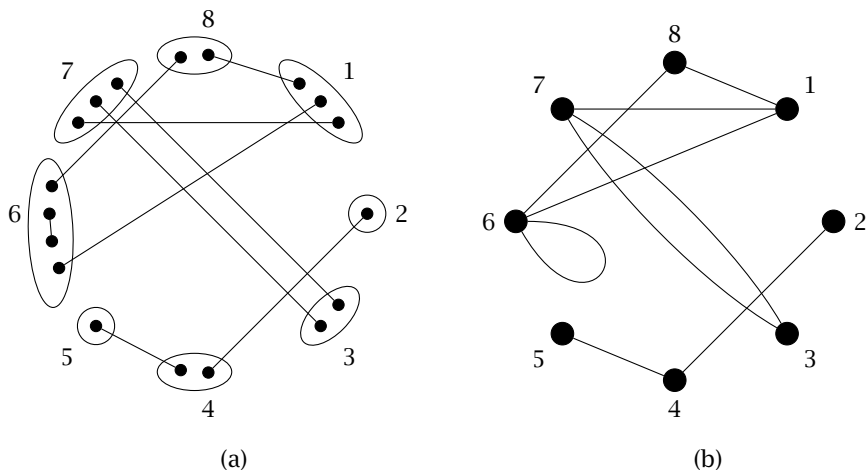


FIGURA 1: Exemple del model de configuració amb  $\mathbf{d}_n = (3, 1, 2, 2, 1, 4, 3, 2)$ : (a) aparellament de les semiarestes, representades com a punts; (b) multigraf resultant.

Observeu que una semiaresta incident a  $v$  es pot aparellar amb una altra semiaresta també incident a  $v$ , i produir així un llaç en aquest vèrtex. De manera similar, més d'una semiaresta incident a  $u$  es pot aparellar amb semiarestes incidents a  $v$ , i produir una aresta múltiple. A la figura 1, aquest és el cas per al vèrtex 6 (llaç) i entre els vèrtexs 3 i 7 (aresta doble). Per aquesta raó, en general, el model de configuració no dona lloc a un graf simple, sinó a un multigraf. No obstant això, proporciona un model fàcilment analitzable que genera exemples amb la seqüència de graus correcta.

Donat un multigraf  $G$  amb conjunt de vèrtexs  $[n]$  i seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$ , hi ha molts aparellaments que el generen. Concretament,

$$\mathbb{P}(\mathbb{CM}_n = G) = \frac{\prod_{i \in [n]} d_i!}{(m_n - 1)!! \prod_{i \in [n]} 2^{a_i} a_i! \prod_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j}!}, \quad (1)$$

on  $a_i$  és el nombre de llaços incidents al vèrtex  $i$ , i  $b_{i,j}$  és el nombre d'arestes entre els vèrtexs  $i$  i  $j$ . Fem, doncs, el càlcul del nombre d'aparellaments que donen lloc a  $G$ . Fixem un ordre arbitrari de les arestes de  $G$ . Llavors podem ordenar les semiarestes incidents al vèrtex  $i$  de  $d_i!$  maneres i aparellar-les segons aquest ordre i l'ordre de les arestes. A causa dels llaços i de les arestes múltiples, un aparellament particular apareixerà  $\prod_{i \in [n]} 2^{a_i} a_i! \prod_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j}!$  vegades. Finalment, la probabilitat d'aparellar les dues semiarestes correctes al pas  $t$  és  $\frac{1}{m_n - 2t + 1}$  i d'aquí s'obté la fórmula (1).

Observeu que, donada  $\mathbf{d}_n$ , la probabilitat en (1) només depèn del nombre de llaços i arestes múltiples de  $G$ , de manera que la probabilitat de qualsevol graf simple és la mateixa. Així doncs,  $\mathbb{CM}_n$  condicionat a l'esdeveniment de ser simple i  $\mathbb{G}_n$  tenen la mateixa llei de probabilitat, és a dir,

$$\mathbb{P}(\mathbb{CM}_n = G \mid \mathbb{CM}_n \text{ és simple}) = \mathbb{P}(\mathbb{G}_n = G). \tag{2}$$

Aquesta és l'observació clau que ens permet estudiar grafs aleatoris utilitzant el model de configuració. Per a qualsevol propietat  $\mathcal{P}$  de grafs simples,

$$\mathbb{P}(\mathbb{G}_n \in \mathcal{P}) = \mathbb{P}(\mathbb{CM}_n \in \mathcal{P} \mid \mathbb{CM}_n \text{ és simple}) = \frac{\mathbb{P}(\mathbb{CM}_n \in \mathcal{P})}{\mathbb{P}(\mathbb{CM}_n \text{ és simple})} \tag{3}$$

i, entenen la probabilitat que el model de configuració produeixi un graf simple, podem transferir les probabilitats del model de configuració als grafs aleatoris.

Abans de donar una expressió per a la probabilitat que  $\mathbb{G}_n$  sigui simple, parlem breument de la distribució de llaços i arestes múltiples. Siguin  $L_n$  i  $M_n$  variables aleatòries que compten, respectivament, el nombre de llaços i de parelles d'arestes dobles que no són llaços a  $\mathbb{CM}_n$ . Podem escriure  $L_n := \sum_{i \in [n]} \sum_{1 \leq r < s \leq d_i} X_{i,r,s}$ , on  $X_{i,r,s}$  és la variable aleatòria indicadora que la  $r$ -èsima i la  $s$ -èsima semiarestes incidents al vèrtex  $i$  s'han aparellat, d'on es desprèn que  $\mathbb{E}[X_{i,r,s}] = \frac{1}{m_n - 1}$ . Es pot obtenir una expressió similar per a  $M_n$ . Per linealitat de l'esperança,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_n] &= \frac{1}{2(m_n - 1)} \sum_{i \in [n]} d_i(d_i - 1) = \frac{\nu_n}{2} (1 + O(1/m_n)), \\ \mathbb{E}[M_n] &= \frac{1}{4(m_n - 1)(m_n - 3)} \sum_{i,j \in [n], i \neq j} d_i(d_i - 1)d_j(d_j - 1) \\ &= \frac{1}{4} (\nu_n^2 - \kappa_n) (1 + O(1/m_n)), \end{aligned} \tag{4}$$

on

$$\begin{aligned} \nu_n &:= \frac{1}{m_n} \sum_{i \in [n]} d_i(d_i - 1), \\ \kappa_n &:= \frac{1}{m_n^2} \sum_{i \in [n]} d_i^2(d_i - 1)^2. \end{aligned}$$

Els paràmetres  $\nu_n$  i  $\kappa_n$  es poden expressar com a combinació lineal de moments de la seqüència de graus. Com veurem més endavant,  $\nu_n$  és un paràmetre clau, no tan sols per controlar el nombre de llaços i arestes dobles, sinó també per entendre l'estructura de components i les distàncies dins del graf aleatori. D'altra banda,  $\kappa_n$  juga un paper més secundari i, per a la gran majoria de seqüències de graus, es té que  $\kappa_n = o(\nu_n)$ . Arribats a aquest punt, és útil establir algunes condicions sobre la seqüència de graus considerada. Donada  $\mathbf{d}_n$ , definim la *distribució de graus*  $D_n = D_n(\mathbf{d}_n)$  com la variable aleatòria sobre  $\mathbb{N}$  que indica el grau d'un vèrtex triat uniformement a l'atzar, és a dir,

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \lambda_{n,k} := \frac{n_{n,k}}{n}, \quad \text{per a tot } k \geq 1. \quad (5)$$

Enunciem ara, doncs, les nostres hipòtesis sobre la seqüència de graus que suposarem per a la majoria dels resultats presentats en aquest article.

**HIPÒTESI A.** *Existeix una distribució de probabilitat  $D = D(\mathbf{d})$  sobre  $\mathbb{N}$  amb  $\lambda_k := \mathbb{P}(D = k)$  per a tot  $k \geq 1$  i*

1.  $D_n \xrightarrow{d} D$ , és a dir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,k} = \lambda_k$  per a tot  $k \geq 1$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[D_n]$  existeix, és finit i és igual a  $\lambda := \mathbb{E}[D]$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[D_n^2]$  existeix, és finit i és igual a  $\mathbb{E}[D^2]$ .

**OBSERVACIÓ 1 (DISCUSSIÓ SOBRE LA HIPÒTESI A).** La primera hipòtesi ens permet descriure  $\mathbb{CM}_n$  en termes dels paràmetres límit. La segona hipòtesi restringeix el nombre d'arestes, en particular,  $m_n = \Theta(n)$ . Finalment, la tercera hipòtesi controla la variància de la distribució dels graus. Definim

$$\nu := \frac{\mathbb{E}[D(D-1)]}{\mathbb{E}[D]} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k \geq 1} k(k-1)\lambda_k.$$

La hipòtesi implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \nu \in [0, \infty), \quad (6)$$

i que el grau màxim compleix

$$\Delta_n = o(\sqrt{n}).$$

**OBSERVACIÓ 2 (HIPÒTESIS A LA LITERATURA).** Cada resultat sobre els grafs aleatoris a la literatura utilitza el seu propi conjunt d'hipòtesis sobre la seqüència de graus donada, sovint sobre característiques com la suavitat, la convergència (uniforme) o l'acotació de certs paràmetres com el grau màxim i el grau mínim. Aquestes hipòtesis acostumen a ser tècniques i complicades d'enunciar. Tanmateix, una gran part dels resultats se satisfan sota hipòtesis molt similars a la hipòtesi A. De fet, les nostres condicions són essencialment les condicions més febles sobre  $\mathbf{d}$  sota les quals  $\mathbb{CM}_{\mathbf{d}}$  té una descripció local simple (vegeu la secció 4). Per tant, escollim la hipòtesi A com un marc comú per a

tots els resultats donats en aquest article. Eventualment, alguns dels resultats requeriran condicions addicionals; en tal cas les destacarem i en justificarem la necessitat. En altres casos, adaptarem alguns resultats a seqüències de graus més enllà de les cobertes per les nostres hipòtesis principals. En particular, la secció 7 estarà dedicada a seqüències de graus sense restriccions en el segon moment.

Tornant a la probabilitat que el model de configuració sigui simple, sota la hipòtesi A, el nombre esperat de laços i arestes múltiples és constant: de (4) en deduïm

$$\mathbb{E}[L_n] \sim \nu/2 \quad \text{i} \quad \mathbb{E}[M_n] \sim \nu^2/4,$$

on hem utilitzat (6), i que  $\kappa_n = o(1)$ , ja que  $\nu_n = O(1)$ . Per a  $n$  prou gran, els laços i les arestes dobles probablement apareixeran lluny els uns dels altres, mostrant correlacions febles que s'esvaniran en el límit. Les variables aleatòries que compten el nombre d'aparicions independents d'esdeveniments amb poca probabilitat segueixen distribucions de Poisson. Així doncs, en el límit,  $L_n$  i  $M_n$  esdevenen variables aleatòries de Poisson independents amb paràmetres  $\nu/2$  i  $\nu^2/4$ , respectivament.

Un laç es pot entendre com un cicle de longitud 1, i una aresta doble, com un cicle de longitud 2. Donem, doncs, el següent resultat més general per a la distribució de cicles curts en el model de configuració (vegeu [26] per una demostració usant el mètode dels moments).

**TEOREMA 3.** *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A. Per a  $k \in \mathbb{N}$ , sigui  $X_{n,k}$  el nombre de cicles de longitud  $k$  en  $\mathbb{CM}_n$ . Aleshores, per a qualsevol seqüència finita  $k_1, \dots, k_l$  d'enters no negatius, el vector aleatori  $(X_{n,k_1}, \dots, X_{n,k_l})$  convergeix en distribució a un vector de variables de Poisson independents amb paràmetres  $\xi_{k_i} := \nu^{k_i}/2k_i$ , respectivament.*

Com a conseqüència del teorema anterior i (3), obtenim el resultat següent.

**TEOREMA 4.** *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A. Llavors,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbb{CM}_n \text{ és simple}) = e^{-\frac{\nu}{2} - \frac{\nu^2}{4}} > 0.$$

*En particular, qualsevol esdeveniment que es compleixi amb alta probabilitat per a  $\mathbb{CM}_n$  també es complirà amb alta probabilitat per a  $\mathbb{G}_n$ .*

La demostració original d'aquest resultat és de Bender i Canfield [4] per a  $\Delta_n = O(1)$  i de Bollobás [5] per a  $\Delta_n \leq \sqrt{2 \log n} - 1$ . La demostració del teorema sota les nostres hipòtesis és de Janson [31].

Si  $X$  és una variable de Poisson amb paràmetre  $\lambda > 0$ , la probabilitat que  $X = 0$  és  $e^{-\lambda}$ . La probabilitat que  $\mathbb{CM}_n$  sigui simple és equivalent a  $L_n = 0$  i  $M_n = 0$ . La primera part del teorema encaixa amb el fet que, en el límit,  $L_n$  i  $M_n$  són variables aleatòries de Poisson independents amb paràmetres  $\nu/2$  i  $\nu^2/4$ , respectivament. La segona part justifica l'ús del model de configuració per a estudiar les propietats típiques dels grafes aleatoris.

Al llarg d'aquest article, ens centrarem en resultats sobre el graf aleatori  $\mathbb{G}_n$  que passen amb alta probabilitat. La gran majoria són demostrats primer pel model de configuració  $\mathbb{CM}_n$  i després transferits a  $\mathbb{G}_n$  utilitzant el teorema 4.

**OBSERVACIÓ 5 (GRAFS ALEATORIS BINOMIALS).** El grau d'un vèrtex en  $\mathbb{G}_{n,p}$  es distribueix com una distribució binomial  $\text{Bin}(n-1, p)$ . Si  $p = p_n = \lambda/n$  per a  $\lambda \in (0, \infty)$ , llavors el grau convergeix en distribució a una Poisson  $\text{Po}(\lambda)$ . Observeu que la seqüència de graus de  $\mathbb{G}_{n,p}$  és una seqüència aleatòria i, per tant,  $\mathbb{G}_{n,p}$  no és un cas particular de  $\mathbb{G}_{n,\mathbf{d}_n}$ , en què la seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$  està fixada *a priori*. Tot i això, la seqüència de seqüències de graus de  $\mathbb{G}_{n,p}$  satisfà la hipòtesi A amb alta probabilitat. Per tant, qualsevol esdeveniment que es compleixi amb alta probabilitat en  $\mathbb{CM}_n$  també es complirà amb alta probabilitat en  $\mathbb{G}_{n,p}$ . Aquest argument es pot estendre als *grafs aleatoris generalitzats* (vegeu, per exemple, [26, secció 7]).

## 4 Aproximació per processos de ramificació

Assumint la hipòtesi A i segons el teorema 3, esperem un nombre constant de cicles de longitud acotada. Així doncs, amb alta probabilitat, el veïnatge d'un vèrtex aleatori d'una profunditat constant és un arbre construït de manera aleatòria. Aquesta és la principal motivació per utilitzar processos de ramificació. Aquesta secció conté una breu introducció als processos de ramificació i s'explica com es poden acoblar amb l'exploració del veïnatge d'un vèrtex a  $\mathbb{CM}_n$ .

### 4.1 Processos de ramificació

Considerem una variable aleatòria  $\xi$  sobre els enters no negatius i siguin  $(\xi_{i,t})_{i \geq 1, t \geq 0}$  còpies independents i idènticament distribuïdes de  $\xi$ . El *procés de ramificació*  $(X_t)_{t \geq 0}$  amb distribució de descendència  $\xi$  (també conegut com a *arbre de Bienaymé-Galton-Watson*) es defineix com  $X_0 = 1$  i, si  $t \geq 0$ ,

$$X_{t+1} := \sum_{i=1}^{X_t} \xi_{i,t}.$$

Els processos de ramificació solen representar-se com a arbres arrelats. Per a qualsevol  $t \geq 0$  i qualsevol element  $i$  comptat per  $X_t$ , li assignem  $\xi_{i,t}$  fills, que representen els elements comptats per  $X_{t+1}$ . Aleshores, la  $t$ -èsima generació del procés és el conjunt d'elements a distància  $t$  de l'arrel, que té mida  $X_t$ . En algunes de les aplicacions d'aquest article, l'arrel del procés tindrà una distribució de descendència diferent de la resta d'elements del procés; en tal cas ho destacarem.

Definim l'*esdeveniment d'extinció* i la *probabilitat d'extinció*, respectivament, com

$$\mathcal{E} := \{\exists t \geq 0 : X_t = 0\} \quad \text{i} \quad \eta := \mathbb{P}(\mathcal{E}). \quad (7)$$

Observeu que si  $\eta = 1$ , llavors el procés s'extingeix quasi segurament (amb probabilitat 1), mentre que si  $\eta < 1$ , hi ha una probabilitat positiva que el procés sobrevisqui. Un dels resultats més notoris sobre els processos de ramificació en determina la probabilitat d'extinció.

**TEOREMA 6.** *Sigui  $(X_t)_{t \geq 0}$  un procés de ramificació que té distribució de descendència  $\xi$ . Aleshores  $\eta$  és la solució no negativa més petita de  $z = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\xi = k)z^k$ . En particular:*

- (i) si  $\mathbb{E}[\xi] \leq 1$  i  $\mathbb{P}(\xi = 1) < 1$ , llavors  $\eta = 1$ ;
- (ii) si  $\mathbb{E}[\xi] > 1$  o  $\mathbb{P}(\xi = 1) = 1$ , llavors  $\eta < 1$ .

Descartant el cas degenerat  $\mathbb{P}(\xi = 1) = 1$ , el teorema estableix que, si el nombre esperat de descendents de cada vèrtex és com a màxim 1, llavors el procés s'extingeix quasi segurament.

La *distribució conjugada* de  $\xi$ , denotada per  $\hat{\xi}$ , es defineix com

$$\mathbb{P}(\hat{\xi} = k) := \eta^{k-1} \mathbb{P}(\xi = k), \quad \text{per a tot } k \geq 0. \quad (8)$$

Les distribucions conjugades s'utilitzen per descriure els processos de ramificació condicionats a l'extinció.

**LEMA 7.** *Sigui  $(X_t)_{t \geq 0}$  un procés de ramificació amb distribució de descendència  $\xi$  que compleix  $\eta > 0$ . Condicionat a  $\mathcal{E}$ ,  $(X_t)_{t \geq 0}$  té la mateixa distribució que un procés de ramificació amb distribució de descendència  $\hat{\xi}$ .*

Aquest lema es pot interpretar de la següent manera: com que la probabilitat d'extinció  $\eta$  és positiva, pot ser que el procés s'extingeixi. Aquest esdeveniment es defineix de manera global i, per tant, *a priori*, el procés condicionat a l'extinció podria tenir una llei de probabilitat complicada. El resultat diu que aquest no és el cas; la seva descripció és molt senzilla ja que no deixa de ser un procés de ramificació amb una altra distribució de descendència. En particular, manté totes les propietats d'independència intrínseques d'aquests processos.

Les demostracions dels resultats d'aquesta part es poden trobar, per exemple, a [26, secció 3].

## 4.2 Acoblament amb el veïnatge d'un vèrtex

El veïnatge local d'un vèrtex en el model de configuració pot ser acoblat amb un procés de ramificació amb distribució provinent de la seqüència de graus, de manera que l'acoblament tingui èxit amb alta probabilitat.

Recordeu la definició de veïnatge a la secció 2. El nostre objectiu és estudiar el procés estocàstic  $(|N_t(v)|)_{0 \leq t \leq h}$ , per al qual necessitem introduir un procés d'exploració de  $\mathbb{C}\mathbb{M}_n$ . Això ens permetrà estudiar aquest model a través de l'estudi dels processos de ramificació.

Donada una regla de prioritat  $\mathcal{R}$  sobre les semiarestes, considerem el següent procés que genera  $\mathbb{C}\mathbb{M}_n$ :

- (i) triem una semiaresta sense emparellar  $e$  (si n'hi ha alguna) segons  $\mathcal{R}$ ;
- (ii) triem una semiaresta sense emparellar  $f \neq e$  uniformement a l'atzar;
- (iii) emparellem  $e$  i  $f$ , i prosseguim.

Tot i que aquest procediment genera el model de punt, és senzill d'analitzar, ja que el conjunt de semiarestes sense emparellar en un cert moment és aleatori i depèn de les eleccions fetes anteriorment. En lloc d'aquest procés inicial, considerem l'objecte  $\mathbb{CM}_n^*$  generat pel procediment anterior substituint (ii) pel pas següent:

- (ii\*) triem una semiaresta  $f$  uniformement a l'atzar entre *totes* les semiarestes.

Cal observar que en  $\mathbb{CM}_n^*$  les semiarestes es poden emparellar més d'un cop, de manera que l'objecte resultant és un conjunt de parelles de semiarestes (no necessàriament diferents). En aquest objecte hi podem definir una distància,<sup>2</sup> i té sentit considerar els  $h$ - i ( $\leq h$ )-veïnatges de  $v$  en  $\mathbb{CM}_n^*$ .

Per determinar  $N_{\leq h}(v)$ , executem el procés d'exploració començant a  $v$  i amb la regla de prioritat donada per l'ordre *BFS* (*breadth first search*): en cada moment triem una de les semiarestes  $e$  més properes a  $v$  que encara no hagi estat emparellada, i si totes les semiarestes estan a distància infinita de  $v$ , triem llavors la que tingui l'etiqueta més petita. Com que només necessitem generar el veïnatge de  $v$  fins a una profunditat  $h$ , aturarem el procés quan totes les semiarestes sense emparellar estiguin a una distància més gran o igual que  $h$  de  $v$ .

Definim  $\mathcal{A}_h(v)$  com l'esdeveniment en  $\mathbb{CM}_n^*$  que, fins al pas que determina completament  $N_{\leq h}(v)$ , cap semiaresta emparellada ni la semiaresta  $e$  seleccionada al pas (i) no s'han seleccionat al pas (ii\*). Condicionats a  $\mathcal{A}_h(v)$ ,  $\mathbb{CM}_n$  i  $\mathbb{CM}_n^*$  tenen la mateixa distribució i podem considerar l'acoblament natural entre els dos.

Definim  $\mathcal{B}_h(v)$  com l'esdeveniment en  $\mathbb{CM}_n$  (o en  $\mathbb{CM}_n^*$ ) en què no s'ha creat cap cicle fins al pas que determina  $N_{\leq h}(v)$ . Si  $\mathcal{B}_h(v)$  es compleix,  $N_{\leq h}(v)$  indueix un arbre a  $\mathbb{CM}_n$  (o a  $\mathbb{CM}_n^*$ ).

En aquest punt podem relacionar l'exploració del veïnatge local de  $v$  a  $\mathbb{CM}_n$  amb el procés de ramificació corresponent. Sigui  $U$  el vèrtex (aleatori) incident a  $f$ , la semiaresta que s'ha triat al pas (ii\*). Com que triem  $f$  del conjunt de *totes* les semiarestes, per a tot  $u \in [n]$ , la probabilitat que  $U = u$  és  $d_u/m_n$ . En particular, la probabilitat que  $U$  tingui grau  $k$  és

$$\mathbb{P}(d_U = k) = \sum_{u:d_u=k} \frac{d_u}{m} = k \cdot \frac{n_{n,k}}{m} =: \mathbb{P}(D_n^* = k),$$

on  $D_n^*$  és coneguda com la *distribució esbiaixada per la mida* de  $D_n$ , i  $D_n$  es defineix com a (5).

Com que  $v$  està fixat,  $|N_1(v)| = d_v$ . Sigui  $2 \leq t < h$  i suposem que som al pas just després que  $N_{t-1}(v)$  hagi estat determinat. El nombre de semiarestes

<sup>2</sup> La distància entre  $v$  i  $w$  en  $\mathbb{CM}^*$  es defineix com la longitud de la seqüència més curta de parelles de semiarestes tal que cada dues parelles consecutives tenen dues semiarestes incidents a un mateix vèrtex, la primera parella és incident a  $v$  i l'última és incident a  $w$ .



incidents a aquest conjunt i encara no aparellades és mesurable respecte a la història actual del procés d'exploració, mentre que  $N_t(v)$  encara és aleatori. Si es compleix  $\mathcal{A}_h(v) \cap \mathcal{B}_h(v)$ , hi ha  $|N_t(v)|$  semiarestes incidents a  $N_{t-1}(v)$  (ja que no hi ha cicles curts) i cadascuna d'elles s'aparellarà a una semiaresta aleatòria, incident a un vèrtex el grau del qual es distribueix segons  $D_n^*$ . Com que no hi ha cicles, tots aquests vèrtexs són diferents i

$$|N_{t+1}(v)| = \sum_{i=1}^{|N_t(v)|} \xi_{i,t},$$

on  $\xi_{i,t}$  són variables aleatòries independents amb distribució  $D_n^* - 1$ . Aquí, el  $-1$  descompta la semiaresta adjacent a cada vèrtex de  $N_t(v)$  que connecta amb  $N_{t-1}(v)$ .

Per tant, si es compleix  $\mathcal{A}_h(v) \cap \mathcal{B}_h(v)$ ,  $(|N_t(v)|)_{0 \leq t \leq h}$  es pot acoblar amb el procés  $(X_t)_{0 \leq t \leq h}$ , que compleix  $X_1 = d_v$ .

Resta calcular la probabilitat que qualsevol dels esdeveniments falli. Com que la probabilitat de triar  $f$  incident amb  $u$  en un pas donat és  $d_u/m_n$  i això produeix un increment de  $(d_u - 1)$  semiarestes noves que podrien fer que l'acoblament fallés, el nombre esperat de semiarestes conflictives<sup>3</sup> afegides a cada pas és

$$\mathbb{E}[D_n^* - 1] = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(d_i - 1)}{m_n} = v_n,$$

que està acotat per la hipòtesi A. Per tant, en el nombre de passos que es requereixen per revelar el veïnatge de  $v$  fins a una profunditat constant, el nombre esperat de semiarestes conflictives és constant i és improbable que aquestes siguin triades com a semiarestes  $f$  durant el procés. Aquestes són les idees principals que hi ha darrere del resultat següent, que determina asimptòticament la llei de la mida del veïnatge local d'un vèrtex.

**LEMA 8 (PRIMER LEMA D'ACOBLEMENT).** *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A. Sigui  $v \in [n]$ . Considerem  $(X_t)_{t \geq 0}$  un procés de ramificació amb descendència  $D_n^* - 1$  que compleix  $X_1 = d_v$ . Per a qualsevol  $h \in \mathbb{N}$ , hi ha un acoblament entre el procés d'exploració de  $\mathbb{CM}_n$  començant a  $v$  i  $(X_t)_{t \geq 0}$ , de manera que*

$$\mathbb{P}((|N_t(v)|)_{0 \leq t \leq h} = (X_t)_{0 \leq t \leq h}) = 1 - O(1/n). \tag{9}$$

Cal observar que la probabilitat que l'acoblament falli és massa gran per demostrar que tots els veïnatges de profunditat acotada  $h$  són arbres. Això encaixa bé amb el teorema 3, que implica que el nombre de cicles curts és positiu amb probabilitat positiva.

El lema anterior descriu el veïnatge d'un vèrtex  $v$  fixat *a priori*, però es pot adaptar al veïnatge d'un vèrtex  $V_n$  triat uniformement a l'atzar de  $[n]$ . En aquest últim cas,  $X_1$  segueix la distribució  $D_n$ , i, per tant, definim els processos següents.

<sup>3</sup> Les semiarestes conflictives són aquelles incidents a vèrtexs que tenen una semiaresta incident ja emparellada, ja que aquestes podrien donar lloc a cicles o ser reaparellades a  $\mathbb{CM}_n^*$ .

DEFINICIÓ 9. Sigui  $(Y_{n,t})_{t \geq 0}$  el procés de ramificació amb distribució de descendència  $D_n^* - 1$ , on l'arrel té distribució de descendència  $D_n$ . Sigui  $(Y_t)_{t \geq 0}$  el procés de ramificació amb distribució de descendència  $D^* - 1$ , on l'arrel té distribució de descendència  $D$ . Aquí  $D^*$  denota la distribució esbiaixada per la mida de  $D$ , és a dir,

$$\mathbb{P}(D^* = k) := \frac{k\lambda_k}{\lambda}, \quad \text{per a tot } k \geq 1,$$

que en particular satisfà

$$\mathbb{E}[D^* - 1] = \nu. \quad (10)$$

LEMA 10 (SEGON LEMA D'ACOBLEMENT). *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A i sigui  $(Y_{n,t})_{t \geq 0}$  com en la definició 9. Per a qualsevol  $h \in \mathbb{N}$ , hi ha un acoblament entre el procés d'exploració de  $\mathbb{C}\mathbb{M}_n$  que comença en un vèrtex  $V_n$  escollit uniformement a l'atzar i  $(Y_{n,t})_{t \geq 0}$ , de manera que*

$$\mathbb{P}((|N_t(V_n)|)_{0 \leq t \leq h} = (Y_{n,t})_{0 \leq t \leq h}) = 1 - O(1/n). \quad (11)$$

OBSERVACIÓ 11. Al lema 10 podem substituir  $(Y_{n,t})_{t \geq 0}$  per  $(Y_t)_{t \geq 0}$  a costa de reemplaçar  $1 - O(1/n)$  per  $1 - o(1)$ , fent més feble la conclusió. De fet, la probabilitat que l'acoblament falli depèn de la velocitat de convergència en les condicions de la hipòtesi A.

Els lemes d'acoblament anteriors es poden estendre si  $h = h_n \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ , sempre que el  $(\leq h_n)$ -veïnatge tingui mida  $o(\sqrt{n})$ ; en aquest cas, la probabilitat d'èxit a (9) i (11) s'ha de reemplaçar per  $1 - o(1)$ .

## 5 Estructura de les components connexes

Un dels problemes fonamentals en grafs aleatoris és descriure la seva estructura de components connexes en funció dels valors dels seus paràmetres. De fet, una de les aplicacions principals dels grafs aleatoris és la modelització de fenòmens estudiats per la física estadística, especialment en relació amb les transicions de fase. Aquest fenomen té lloc quan un sistema físic experimenta un canvi abrupte i qualitatiu en resposta a petites variacions en un paràmetre extern, com ara la temperatura o la pressió. Un exemple d'aquesta transició de fase es pot observar en el pas entre els diferents estats de l'aigua, els quals es poden modelar mitjançant grafs aleatoris diferents; vegeu, per exemple, la revisió de Duminil-Copin [15]. En aquests grafs, els paràmetres externs es representen a través dels paràmetres del model.

En aquesta secció ens endinsem en l'estudi de la transició de fase per la propietat de l'existència d'una component connexa macroscòpica en el graf, en contrast amb un graf altament fragmentat. El resultat fundacional i més important en la teoria de grafs aleatoris va ser provat per Erdős i Rényi [16]: essent  $C_1(\mathbb{G}_{n,p})$  la component més gran del graf aleatori binomial  $\mathbb{G}_{n,p}$ , si  $p = p(n) = \lambda/n$  per a  $\lambda > 0$ , tenim el següent:

- si  $\lambda < 1$ , llavors  $\nu(C_1(\mathbb{G}_{n,p})) = \Theta(\log n)$  aap;
- si  $\lambda = 1$ , llavors  $\nu(C_1(\mathbb{G}_{n,p})) = \Theta(n^{2/3})$  aap;
- si  $\lambda > 1$ , llavors  $\nu(C_1(\mathbb{G}_{n,p})) = \Theta(n)$  aap.

Aquestes tres fases són conegudes, respectivament, com els règims *subcrític*, *crític* i *supercrític*. En el règim supercrític, la component connexa d'ordre lineal és coneguda com la *component gegant* i totes les altres components tenen ordre  $O(\log n)$ . Aquest resultat es coneix informalment com el *doblet salt*, degut a l'evolució de l'ordre de la component més gran al voltant de  $p = 1/n$ .

Un fenomen similar emergeix en els grafs aleatoris amb una seqüència de graus donada. En el nostre cas, el paràmetre del model  $\mathbb{G}_{n,\mathbf{d}_n}$  és la seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$ . Així doncs, l'objectiu principal d'aquesta secció és determinar les seqüències de graus  $\mathbf{d}_n$  per a les quals  $\nu(C_1(\mathbb{G}_n)) = o(n)$  aap, i aquelles per a les quals  $\nu(C_1(\mathbb{G}_n)) = \Theta(n)$  aap.

### 5.1 El criteri de Molloy-Reed

En aquesta secció presentem un criteri per determinar l'existència d'una component gegant que és vàlid sota la hipòtesi A. Abans de presentar-lo, donem una intuïció per entendre'l.

Segui  $V_n$  un vèrtex triat uniformement a l'atzar de  $[n]$ . Pel lema 10 i l'observació 11, aap el veïnatge local de  $V_n$  es comporta com les primeres generacions de  $(Y_t)_{t \geq 0}$ . La sub/supercriticalitat d'aquest procés no depèn de la distribució de descendència de l'arrel, que és  $D$ , sinó només de la distribució de descendència dels altres elements, que és  $D^* - 1$  i que té esperança  $\nu$  segons l'equació (10). Pel teorema 6, el valor de  $\nu$  determina si el procés s'extingeix quasi segurament o si té probabilitat positiva de sobreviure. Aquesta és la intuïció que hi ha darrere del resultat següent.

**TEOREMA 12 (CRITERI DE MOLLOY-REED).** *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A. Aleshores,*

- (i) *si  $\nu < 1$ , llavors  $\nu(C_1(\mathbb{G}_n)) = o(n)$  aap;*
- (ii) *si  $\nu > 1$ , llavors  $\nu(C_1(\mathbb{G}_n)) = \Theta(n)$  aap.*

La primera demostració d'aquest teorema és de Molloy i Reed [43], però requereix condicions més fortes sobre la seqüència de graus. El resultat com es presenta aquí és conseqüència d'un resultat de Janson i Luczak [32] que discutirem amb detall més endavant.

**OBSERVACIÓ 13.** A la literatura també s'utilitzen els paràmetres

$$Q_n := \frac{1}{m} \sum_{i \in [n]} d_i(d_i - 2) = \nu_n - 1, \quad Q := \frac{1}{\lambda} \sum_{k \geq 1} k(k - 2)\lambda_k = \nu - 1.$$

Mentre que  $\nu_n$  és aproximadament el nombre esperat de nous veïns de cada vèrtex en les primeres etapes del procés d'exploració,  $Q_n$  es pot interpretar

de la manera següent. Sigui  $E_t$  el nombre d'arestes entre els conjunts de vèrtexs explorats i de no explorats en el pas  $t$  del procés. Si  $t$  és prou petit,  $Q_n \sim \mathbb{E}_t(E_t - E_{t-1})$ , on  $\mathbb{E}_t$  és l'esperança condicionada, on condicionem a la història generada pels primers  $t - 1$  passos del procés.

## 5.2 El règim subcrític

El cas  $\nu < 1$  (o  $Q < 0$ ) es coneix com a *règim subcrític*. D'una banda, si  $D_n \sim \text{Po}(\lambda)$  amb  $\lambda < 1$ , el graf aleatori s'assembla a un  $\mathbb{G}_{n,p}$  amb  $p = \lambda/n$ , que satisfà  $\nu(C_1(\mathbb{G}_{n,p})) = \Theta(\log n)$  aap. D'altra banda, de manera determinista,  $\nu(C_1(\mathbb{G}_n)) \geq \Delta_n + 1$ , que pot créixer més ràpidament que de manera logarítmica.

Per determinar l'ordre de la component més gran, ens centrarem en l'estudi de la component d'un vèrtex triat uniformement a l'atzar. Sigui  $(Y_{n,t})_{t \geq 0}$  com en la definició 9. Per la desigualtat de Markov, la probabilitat que el procés de ramificació sobrevisqui fins a la generació  $t \geq 1$  és

$$\mathbb{P}(Y_{n,t} \geq 1) \leq \mathbb{E}[Y_{n,t}] = \mathbb{E}[D_n] \mathbb{E}[D_n^* - 1]^{t-1} = \frac{m_n}{n} \nu_n^{t-1},$$

que té un decreixement exponencial en  $t$ . Si  $t$  és més gran que  $\frac{\log n}{|\log \nu_n|} \sim \frac{\log n}{|\log \nu|}$ , aleshores obtenim que la probabilitat que algun vèrtex a  $\mathbb{C}\mathbb{M}_n$  tingui vèrtexs a distància  $t$  és a com a màxim

$$\sum_{v \in [n]} d_v \nu_n^{t-1} = m_n \nu_n^{t-1} = o(1).$$

Tot i que això indica que el diàmetre de cada component és logarítmic, bé podria ser el cas que el nombre de vèrtexs en aquestes components fos molt més gran. El resultat següent demostra que no és així.

**TEOREMA 14.** *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A. Si  $\nu < 1$ , llavors aap*

$$\nu(C_1(\mathbb{G}_n)) = O(\Delta_n \log n).$$

Molloy i Reed [43] anteriorment havien demostrat que  $\nu(C_1(\mathbb{G}_n)) = O(\Delta_n^2 \log n)$  i aquesta millora en la cota superior ha estat provada recentment per Coulson i l'autor [12].

## 5.3 El règim supercrític

El cas  $\nu > 1$  (o  $Q > 0$ ) es coneix com a *règim supercrític*. El teorema 12 garanteix l'existència d'una component gegant, però quin és el seu ordre i la seva mida? Per determinar-ho, estudiarem la probabilitat que un vèrtex triat uniformement  $V_n$  pertanyi a la component gegant.

Per obtenir una intuïció podem usar l'acoblament amb processos de ramificació descrit en la secció 4. Sigui  $(Y_t)_{t \geq 0}$  com a la definició 9. Com que  $\nu > 1$ ,

hi ha una probabilitat positiva que el procés sobrevisqui indefinidament. D'una banda, si el procés s'extingeix, ho farà típicament en un nombre constant de passos, i  $V_n$  pertanyerà a una component petita. D'altra banda, si el procés sobreviu, la component de  $V_n$  creixerà fins a un punt en què ja no es podrà acoblar amb  $(Y_t)_{t \geq 0}$ . En aquest punt, la component exposada serà suficientment gran i aap formarà part de la component gegant.

Tot i que el comportament sub/supercrític de  $(Y_t)_{t \geq 0}$  no depèn de la distribució de descendència de l'arrel, la probabilitat d'extinció sí que en depèn. Sigui  $\eta$  la probabilitat d'extinció d'un procés de ramificació amb descendència  $D^* - 1$ . Condicionat a  $Y_1 = k$ ,  $(Y_t)_{t \geq 0}$  només s'extingirà si tots els  $k$  subprocessos independents que comencen a la primera generació s'extingeixen, cosa que passa amb probabilitat  $\eta^k$ . Com que  $\mathbb{P}(Y_1 = k) = \lambda_k$ , tenim que la probabilitat de supervivència de  $(Y_t)_{t \geq 0}$  és

$$\sum_{k \geq 1} (1 - \eta^k) \lambda_k = 1 - \sum_{k \geq 1} \eta^k \lambda_k.$$

Pel que fa al nombre d'arestes contingudes a la component gegant, la situació és diferent. Sigui  $E_n$  una aresta triada uniformement a l'atzar, i  $U_n$  un dels extrems de  $E_n$ . Llavors, per a qualsevol  $u \in [n]$ , la probabilitat que  $U_n = u$  és proporcional al nombre de semiaarestes incidents a  $u$ . Així, el grau  $d_{U_n}$  es distribueix segons  $D_n^*$ , que s'aproxima per  $D^*$ . El veïnatge de  $E_n$  és la unió dels veïnatges dels seus dos extrems. En contrast amb els veïnatges de vèrtexs, aquí l'extrem  $U_n$  dona lloc a  $d_{U_n} - 1$  arestes noves en el primer pas (ja que  $E_n$  no es compta). Per tant, el veïnatge de  $E_n$  es pot acoblar amb un procés de ramificació  $(X_t)_{t \geq 0}$  amb distribució de descendència  $D^* - 1$  i  $X_0 = 2$ . D'aquí es dedueix que la probabilitat que una aresta  $E_n$  pertanyi a la component gegant és  $1 - \eta^2$ .

La discussió anterior proporciona la intuïció que hi ha darrere del teorema següent.

**TEOREMA 15.** *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A. Si  $\nu > 1$ , llavors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(C_1(\mathbb{G}_n))}{n} = 1 - \sum_{k \geq 1} \eta^k \lambda_k, \quad \text{en probabilitat,} \tag{12}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(C_1(\mathbb{G}_n))}{n} = \frac{\lambda}{2} (1 - \eta^2), \quad \text{en probabilitat,}$$

on  $\eta$  és la probabilitat d'extinció d'un procés de ramificació amb distribució de descendència  $D^* - 1$ .

A més a més, per a qualsevol altra component  $C$  de  $\mathbb{G}_n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(C)}{n} = 0, \quad \text{en probabilitat.}$$

El teorema 15 va ser demostrat inicialment per Molloy i Reed [44] sota condicions més fortes sobre la seqüència de graus; el resultat com s'indica aquí és de Janson i Luczak [32]. De fet, (12) també es compleix si eliminem la hipòtesi A.3 i demanem que  $\mathbb{P}(D \geq 3) > 0$ , com van demostrar Bollobás i Riordan [6] (vegeu també van der Hofstad [27, secció 4]).

#### 5.4 El règim crític

El cas  $\nu = 1$  (o  $Q = 0$ ), conegut com a *règim crític*, ha generat molt d'interès en la literatura. Aquest règim es divideix en tres subrègims: el *quasisubcrític*, la *finestra crítica* i el *quasisupercrític*. En paraules, la finestra crítica és el conjunt de paràmetres que fan que el graf aleatori es comporti com un objecte crític. Aleshores, el subrègim quasisubcrític (o quasisupercrític) és el subrègim entre el règim subcrític (o supercrític) i la finestra crítica. Per distingir entre els tres règims, cal considerar la velocitat a la qual  $Q_n$  convergeix a  $Q$  quan  $n \rightarrow \infty$  i utilitzar informació addicional sobre el procés.

Definim

$$R_n := \frac{1}{m_n} \sum_{i \in [n]} d_i(d_i - 2)^2.$$

Recordeu la definició de  $E_t$  a l'observació 13. Per a  $t$  prou petit,  $Q_n \sim \mathbb{E}_t(E_t - E_{t-1})$  i  $R_n \sim \mathbb{E}_t((E_t - E_{t-1})^2)$ . Si  $Q_n \rightarrow 0$  prou ràpidament, llavors el temps que triga  $E_t$  a ser zero (moment en què s'acaba l'exploració d'una component connexa) només depèn de les fluctuacions del procés, donades per  $R_n$  i no per  $Q_n$ . Hatami i Molloy ([25]) van trobar la condició necessària i suficient perquè això passi, establint l'amplada de la finestra crítica sota la hipòtesi A (i un parell de condicions addicionals més): per a qualsevol  $\lambda, \epsilon > 0$  existeix  $C > 1$  tal que si  $Q_n \rightarrow 0$  i  $|Q_n|^3 n / R_n^2 \leq \lambda$ , llavors

$$\mathbb{P} \left( \frac{\nu(C_1(\mathbb{G}_n))}{R_n^{-1/2} n^{2/3}} \notin (C^{-1}, C) \right) \leq \epsilon.$$

Observeu que si  $R_n = O(1)$ , llavors la finestra crítica es comporta com la del graf aleatori binomial  $\mathbb{G}_{n,p}$ , quan  $p = \frac{1}{n} + O(n^{-4/3})$ , fet que dona lloc a components de mida  $\Theta(n^{2/3})$ .

La distribució límit dels ordres de les components més grans, adequadament normalitzats, ha estat estudiada en [13, 14, 35]. Riordan ([46]) va donar la descripció completa dels dos subrègims per a seqüències de graus acotats. Aquests resultats s'han estès recentment per seqüències de graus no acotats per al subrègim quasisubcrític [12] i el quasisupercrític [28, 32].

#### 5.5 Un criteri universal

El criteri de Molloy-Reed no es compleix de manera general per a seqüències de graus més enllà de les que compleixen la hipòtesi A. Com es mostra a [6, 27], la hipòtesi A.3 es pot eliminar de les condicions, però això no passa amb

les altres suposicions. Joos, Rautenbach, Reed i l'autor ([34]) van proposar el criteri següent, que funciona per a totes les seqüències de graus  $\mathbf{d}_n$ . Fixem  $\mathbf{d}_n$  i assumim que  $d_1 \leq \dots \leq d_n$  (altrament, podem reetiquetar els vèrtexs perquè així sia) i definim els paràmetres següents:

$$\hat{m}_n := \sum_{d_i \neq 2} d_i,$$

$$j_n^* := \inf \left\{ j \in [n] : \sum_{i=1}^j d_i(d_i - 2) > 0 \right\} \wedge n,$$

$$S_n := \sum_{j=j_n^*}^n d_j.$$

En termes d'aquests paràmetres, es pot donar la següent classificació de seqüències per a l'existència d'una component gegant.

**TEOREMA 16 (CRITERI UNIVERSAL PER A LA COMPONENT GEGANT).** *Per a qual-sevol seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$ ,*

- (i) *si  $\hat{m}_n \rightarrow \infty$  i  $S_n = o(n)$ , llavors  $v(C_1(\mathbb{G}_n)) = o(n)$  aap;*
- (ii) *si  $\hat{m}_n \rightarrow \infty$  i  $S_n = \Theta(n)$ , llavors  $v(C_1(\mathbb{G}_n)) = \Theta(n)$  aap;*
- (iii) *si  $\hat{m}_n = O(1)$ , llavors, per a cada  $\epsilon > 0$ , existeix  $\delta > 0$  tal que*

$$\mathbb{P} \left( \frac{v(C_1(\mathbb{G}_n))}{n} \leq \epsilon \right) \geq \delta, \quad \mathbb{P} \left( \frac{v(C_1(\mathbb{G}_n))}{n} \geq 1 - \epsilon \right) \geq \delta.$$

### 5.6 Grafs aleatoris dirigits

Moltes de les xarxes que ens trobem en el món real són dirigides, és a dir, el fet que un vèrtex es connecti amb un altre no necessàriament implica que el segon estigui connectat amb el primer. Alguns exemples són la *world wide web* (xarxa d'Internet on les arestes són hiperenllaços d'una pàgina a una altra), la xarxa de citacions en articles científics, algunes xarxes socials (Instagram, Twitter, etc.) o la xarxa de carreteres d'una ciutat. Els grafs dirigits tenen similituds amb els no dirigits, però algunes nocions, així com els resultats que les estudien, canvien dràsticament. En aquesta secció discutim breument l'estructura de les components fortament connexes dels grafs aleatoris dirigits, però primer ens cal definir-los.

Una *seqüència de digraus* de longitud  $n$  és una seqüència  $\vec{\mathbf{d}}_n = ((d_i^-, d_i^+))_{i \in [n]}$ , on  $d_i^-$  i  $d_i^+$  són números enters no negatius amb  $d_i^-, d_i^+ \leq n-1$ , per a tot  $i \in [n]$ . Totes les definicions i notacions bàsiques per al cas no dirigit, s'adapten de forma natural a grafs (aleatoris) dirigits. Donada una seqüència de digraus factible  $\vec{\mathbf{d}}_n$ ,  $\vec{\mathbb{G}}_n = \vec{\mathbb{G}}_{n, \vec{\mathbf{d}}_n}$  és un graf dirigit triat uniformement aleatòriament entre tots els grafs dirigits amb conjunt de vèrtexs  $[n]$  i amb seqüència de digraus  $\vec{\mathbf{d}}_n$ .

Sigui  $\vec{D}_n = (D_n^-, D_n^+)$  el grau d'un vèrtex triat uniformement a l'atzar a  $[n]$ . Podem establir hipòtesis anàlogues a la hipòtesi A per a seqüències de digraus: existeix una distribució de probabilitat  $\vec{D} = (D^-, D^+)$  a  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$  tal que  $\vec{D}_n \xrightarrow{d} \vec{D}$  i per a tots els números enters no negatius  $a, b$  amb  $a + b \leq 2$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(D_n^-)^a (D_n^+)^b] = \mathbb{E}[(D^-)^a (D^+)^b] < \infty.$$

Definim

$$\vec{\nu} := \frac{\mathbb{E}[D^- D^+]}{\mathbb{E}[D^-]}. \quad (13)$$

Llavors  $\vec{\nu}$  controla si la component fortament connexa més gran té ordre lineal (vegeu [11, 7]): si  $\vec{\nu} > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(C_1(\vec{\mathbb{G}}_n))}{n} = \zeta, \quad \text{en probabilitat,} \quad (14)$$

per a alguna constant  $\zeta > 0$ ; i si  $\vec{\nu} < 1$ , llavors  $\nu(C_1(\vec{\mathbb{G}}_n)) = O(1)$ .

## 5.7 Percolació

Donada una propietat d'una xarxa, és natural plantejar-nos com és de robusta davant de determinats canvis en l'ambient. En el nostre cas, ho mesurarem a través del concepte de *percolació*: si cada aresta és eliminada amb una certa probabilitat, quina és la probabilitat que la propietat es perdi? Ens focalitzarem en la propietat de contenir una component gegant; per tant, assumirem que  $\nu > 1$  per tal que el graf aleatori inicialment satisfaci aquesta propietat aap. Aleshores estudiarem quina és la mínima probabilitat d'eliminació que fa que la percolació canvia l'estructura de components de manera substancial. Aquesta noció té múltiples aplicacions, per exemple, en l'estabilitat dels sistemes ecològics o en la resistència d'una xarxa de comunicació a atacs aleatoris.

Donat un graf  $G$  i  $p \in [0, 1]$ , el *graf  $p$ -percolat*  $G^p$  és un graf aleatori obtingut a partir de  $G$  mantenint cada aresta independentment amb probabilitat  $p$ . Per exemple, si  $G = K_n$  és el graf complet amb  $n$  vèrtexs, llavors  $G^p = \mathbb{G}_{n,p}$  és el graf aleatori binomial.

Quan considerem  $\mathbb{G}_n^p$ , primer cal observar que hi ha dos nivells d'aleatorietat: primer triem un graf aleatori  $\mathbb{G}_n$  i després percolem cada aresta independentment amb probabilitat  $p$ . No obstant això, l'heurística següent és vàlida sempre que la seqüència de graus satisfaci la hipòtesi A. Construïm una seqüència (aleatòria) de graus percolats  $\mathbf{d}_n^p$  mantenint cada semiaresta de la seqüència de graus original  $\mathbf{d}_n$  independentment amb probabilitat  $p$ . Suposant que la suma dels graus percolats sigui parell (condició necessària per ser seqüència de graus), podem considerar el model de configuració  $\mathbb{CM}_{n, \mathbf{d}_n^p}$ . Llavors,  $\mathbb{CM}_{n, \mathbf{d}_n^p}$  té la mateixa llei de probabilitat que  $(\mathbb{CM}_{n, \mathbf{d}_n})^p$ .

Aleshores, la *probabilitat crítica de percolació*  $p_c$  es defineix com l'ímfim de les probabilitats  $p$  que fan que el graf aleatori percolat  $\mathbb{G}_n^p$  tingui una



component gegant aap. El grau en  $\mathbf{d}_n^p$  d'un vèrtex de grau  $\ell$  en  $\mathbf{d}_n$  està distribuït com a  $\text{Bin}(\ell, p)$ . Per tant, el nombre esperat de vèrtexs de grau  $k$  en  $\mathbf{d}_n^p$  és

$$\lambda_k^p := \sum_{\ell \geq k} \lambda_\ell \binom{\ell}{k} p^k (1-p)^{\ell-k},$$

i podem calcular el grau mitjà esperat de  $\mathbf{d}_n^p$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} k \lambda_k^p &= \sum_{k \geq 1} k \sum_{\ell \geq k} \lambda_\ell \binom{\ell}{k} p^k (1-p)^{\ell-k} \\ &= \sum_{\ell \geq 1} \lambda_\ell \sum_{k \leq \ell} k \binom{\ell}{k} p^k (1-p)^{\ell-k} \\ &= \sum_{\ell \geq 1} p \ell \lambda_\ell = p \lambda, \end{aligned}$$

on hem utilitzat que  $\mathbb{E}[\text{Bin}(\ell, p)] = \ell p$ . De manera similar podem fer servir que  $\text{Var}(\text{Bin}(\ell, p)) = \ell p(1-p)$  per obtenir

$$\sum_{k \geq 1} k(k-1) \lambda_k^p = p^2 \sum_{k \geq 1} k(k-1) \lambda_k.$$

**Definim**

$$\nu^p := \frac{\sum_{k \geq 1} k(k-1) \lambda_k^p}{\sum_{k \geq 1} k \lambda_k^p} = p \nu.$$

Segons l'heurística introduïda en les seccions anteriors, la condició per a la supercriticalitat del graf aleatori percolat és  $\nu^p > 1$ , que és equivalent a  $p > 1/\nu$ , com estableix el teorema següent.

**TEOREMA 17.** *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A amb  $\nu > 1$ . Sigui  $p_c := 1/\nu \in (0, 1)$ . Llavors,*

- (i) *si  $p < p_c$ , llavors  $\nu(C_1(\mathbb{G}_n^p)) = o(n)$  aap;*
- (ii) *si  $p > p_c$ , llavors  $\nu(C_1(\mathbb{G}_n^p)) = \Theta(n)$  aap.*

Aquest resultat va ser demostrat per Fountoulakis [20] sota condicions més fortes en la seqüència de grau, i l'enunciat donat aquí és de Janson [30], que també va calcular l'orde asimptòtic de  $C_1(\mathbb{G}_n^p)$  quan  $p > p_c$ .

## 5.8 Connectivitat

Més enllà del llindar per a l'existència d'una component gegant, arribem al llindar per a la connectivitat del graf. Recordem que un graf és connex si tots els vèrtexs estan a distància finita els uns dels altres. La connectivitat és una propietat desitjable en moltes xarxes. Per exemple, en una xarxa de telecomunicacions, com la xarxa 5G, la connectivitat certifica que dos nodes qualssevol es poden comunicar a través d'ella.

Luczak ([37]) va demostrar que si  $d_i \geq 3$  per a tot  $i \in [n]$  (i el grau màxim no és massa gran), llavors  $\mathbb{G}_n$  és connex aap. Des del punt de vista intuïtiu, si cada vèrtex està connectat com a mínim amb tres més, això ens garanteix que típicament tots els veïnatges creixen a una velocitat exponencial, i acaben per formar part de la mateixa component. Així doncs, és natural preguntar-nos quants vèrtexs de grau 1 i grau 2 podem permetre en la seqüència de graus abans que el graf aleatori deixi de ser connex aap.

Recordem que la nostra hipòtesi implica que  $m_n = \Theta(n)$ . D'una banda, suposem que hi ha  $k$  vèrtexs de grau 1. La probabilitat que cap de les semiarestes incidents a vèrtexs de grau 1 s'aparelli entre elles, formant una aresta aïllada, és

$$\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{k-i}{m_n - 2i + 1}\right) \sim e^{-k^2/2m_n},$$

sempre que  $k$  no sigui massa gran. Així doncs, si  $k$  és d'ordre més gran o igual que  $\sqrt{n}$ , la probabilitat que existeixi una aresta aïllada, i que, per tant, el graf no sigui connex, és positiva. Això es pot veure com un exemple del problema clàssic en probabilitat discreta conegut com a *paradoxa dels aniversaris*; vegeu [18, p. 33].

D'altra banda, recordeu que  $\lambda_2$  és la proporció de vèrtexs de grau 2. Per a  $k \geq 3$  fixat, la probabilitat que un vèrtex de grau 2 concret pertanyi a un cicle de longitud  $k$  aïllat és

$$\frac{1}{m_n - 2k + 1} \prod_{i=1}^k \frac{2(n_{2,n} - i + 1)}{m_n - 2i + 1} \sim \frac{(2\lambda_2)^{k-1}}{\lambda^k} \cdot \frac{1}{n}.$$

Per tant, si  $\lambda_2 > 0$ , el nombre esperat de cicles curts aïllats de qualsevol longitud constant és positiu. En cas que algun d'ells existeixi,  $\mathbb{G}_n$  no seria connex.

Si el límit existeix, definim

$$\rho_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{1,n}}{\sqrt{n}} \in [0, \infty].$$

TEOREMA 18. *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A i que  $\rho_1$  existeix. Llavors,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbb{G}_n \text{ és connex}) = \sqrt{\frac{\lambda - 2\lambda_2}{\lambda}} \cdot e^{-\frac{\rho_1^2}{2(\lambda - 2\lambda_2)} + \frac{\lambda_2^2 + \lambda\lambda_2}{\lambda^2}},$$

on  $\lambda$  es defineix al punt 2 de la hipòtesi A. En particular,

- (i) si  $\rho_1 = \infty$  o  $\lambda_2 = 1$ , llavors  $\mathbb{G}_n$  no és connex aap;
- (ii) si  $\rho_1 = 0$  i  $\lambda_2 = 0$ , llavors  $\mathbb{G}_n$  és connex aap.

Aquest resultat va ser demostrat per Federico i van der Hofstad [17].

## 6 Distàncies

Una de les característiques més importants de les xarxes complexes és el fenomen petit-món (*small-world*): és possible connectar dos nodes qualssevol de la xarxa a través d'un camí sorprenentment curt. És ben conegut l'experiment de Milgram, que va estudiar la distància mitjana de la població dels Estats Units d'Amèrica a través de la seva xarxa de coneguts. D'aquí en va sortir el concepte dels *sis graus de separació*: entre dues persones qualssevol sempre hi ha una connexió a través de sis o menys persones conegudes entre elles. Per tant, és important que els grafes aleatoris que utilitzem per modelar aquestes xarxes tinguin també aquesta característica. Com veurem en aquesta secció, la distància típica entre dos vèrtexs aleatoris, així com el diàmetre del graf  $\mathbb{G}_n$ , són d'ordre logarítmic en  $n$ , que és molt menor que l'ordre del graf.

### 6.1 Distància típica

Siguin  $U_n$  i  $V_n$  triats independentment i de manera uniforme de  $[n]$ . El nostre objectiu és estudiar la variable aleatòria  $\text{dist}(U_n, V_n)$ , coneguda com a *distància típica*, on la distància es mesura a  $\mathbb{G}_n$  com s'ha descrit a l'inici de la secció 2. Si  $\nu < 1$ , la gran majoria de parelles no estan connectades, així que ens limitarem al cas supercrític  $\nu > 1$ . Com que el nostre graf aleatori pot no ser connex, té sentit condicionar  $U_n$  i  $V_n$  a pertànyer a la mateixa component connexa, la gegant.

Donarem un argument heurístic per calcular la distància típica. Segons el lema 8, els veïnatges de  $U_n$  i  $V_n$  creixen a la mateixa velocitat que un procés de ramificació amb distribució de descendència  $D^* - 1$  (la descendència de l'arrel no és rellevant per a aquesta anàlisi), on  $D^*$  s'ha introduït a la definició 9, de manera que la mida esperada del  $h$ -veïnatge d'un vèrtex és de l'ordre de  $\nu^h$ . La mida dels veïnatges no està concentrada al voltant de la seva esperança; de fet, hi ha molts vèrtexs amb veïnatges relativament petits. No obstant això, condicionat al fet que  $U_n$  i  $V_n$  pertanyin a la component gegant, la mida dels dos veïnatges sí que està concentrada al voltant de  $\nu^h$ . Fixant  $h = \frac{\log n}{2 \log \nu}$ , cadascun dels dos  $h$ -veïnatges tenen una mida aproximada de  $\sqrt{n}$ . A més a més, donats dos conjunts fixats de mida  $\sqrt{n}$ , hi ha una probabilitat constant de tenir una aresta entre ells, connectant aquests dos veïnatges i creant un camí entre  $U_n$  i  $V_n$ . Així doncs, la distància típica hauria de ser aproximadament  $2h$ .

El resultat següent determina la distància típica en grafes aleatoris en el règim supercrític. La seva prova formalitza l'heurística anterior i es pot trobar a [27, secció 6].

**TEOREMA 19.** *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A i  $\nu > 1$ . Si  $U_n$  i  $V_n$  es trien independentment i de manera aleatòria de  $[n]$ , condicionats al fet que  $U_n$  i  $V_n$  estiguin a la component gegant de  $\mathbb{G}_n$ , aleshores*

$$\text{dist}(U_n, V_n) \sim \frac{\log n}{\log \nu}.$$

Si la hipòtesi A.3 falla, en particular si  $\mathbb{E}[D^2] = \infty$ , el resultat encara és vàlid i  $\text{dist}(U_n, V_n) = o(\log n)$ .

## 6.2 Diàmetre

Recordeu que el diàmetre d'una component connexa és la distància més gran entre dos dels seus vèrtexs. En el règim subcrític  $\nu < 1$ , l'argument usat a la subsecció 5.2 dona una idea del fet que el diàmetre més gran d'una component és asimptòticament igual a  $\frac{\log n}{|\log \nu|}$ . En el règim supercrític  $\nu > 1$ , tot i que la component gegant té ordre lineal, el seu diàmetre és d'ordre logarítmic, com la distància típica. No obstant això, el diàmetre i la distància típica difereixen per una constant multiplicativa. Descartant el cas degenerat  $\lambda_1 = 0$ , on  $\lambda_1$  està definit a la hipòtesi A, donem una discussió informal sobre aquesta constant abans d'enunciar el resultat.

Al règim supercrític, típicament, el veïnatge d'un vèrtex o bé creix ràpidament o bé s'extingeix en un nombre petit de passos. No obstant això, hi ha veïnatsges atípics que ni s'expandiran ni s'extingiran durant molts passos. Per donar una intuïció sobre aquest fenomen, considerem un procés de ramificació supercrític  $(X_t)_{t \geq 0}$  amb distribució de descendència  $\xi$ . Sigui  $\hat{\xi}$  la distribució conjugada de  $\xi$ , definida com a (8); podem escriure

$$\hat{\nu} := \mathbb{E}[\hat{\xi}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k \geq 1} k(k-1)\eta^{k-2}\lambda_k \in (0, 1), \quad (15)$$

que indica el creixement esperat del procés  $(X_t)_{t \geq 0}$  condicionat a la seva extinció. En particular, com que  $\hat{\nu} < 1$ , el procés condicionat és subcrític.

Diem que un element del procés té *descendència infinita* si el subarbre que en penja no s'extingeix. Sigui  $(X'_t)_{t \geq 0}$  el subprocés dels elements amb descendència infinita. Podem calcular la probabilitat que, condicionat a la seva supervivència, el procés només tingui un element amb descendència infinita a la generació  $t$ , és a dir,  $X'_t = 1$ . Recordeu que  $\mathcal{E}$  és l'esdeveniment d'extinció i  $\eta$  és la seva probabilitat; vegeu (7). Tenim

$$\mathbb{P}(X'_1 = 1 \mid \bar{\mathcal{E}}) = \frac{\mathbb{P}(X'_1 = 1)}{\mathbb{P}(\bar{\mathcal{E}})} = \frac{\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\xi = k)k(1-\eta)\eta^{k-1}}{1-\eta} = \hat{\nu}.$$

Aquesta fórmula té l'explicació següent: l'arrel pot tenir qualsevol nombre positiu  $k$  de fills, distribuïts d'acord amb la llei de  $\xi$ . Llavors hi ha  $k$  opcions per seleccionar el fill que tindrà descendència infinita, cosa que passa amb probabilitat  $(1-\eta)$ . D'altra banda, cadascun dels altres  $(k-1)$  fills té probabilitat  $\eta$  que s'extingeixi la seva descendència. Com que tots els esdeveniments anteriors són mútuament independents, se n'obté la fórmula.

Noteu que  $(X'_t)_{t \geq 0}$  és un procés no decreixent. Per tant, si  $X'_t = 1$ , llavors  $X'_s = 1$  per a tot  $s \in [t]$ . Com que  $\{X'_0 = 1\} = \bar{\mathcal{E}}$ , usant la propietat markoviana dels processos de ramificació, tenim que:

$$\mathbb{P}(X'_t = 1 \mid \bar{\mathcal{E}}) = \prod_{s=1}^t \mathbb{P}(X'_s = 1 \mid X'_{s-1} = 1) = (\mathbb{P}(X'_1 = 1 \mid \bar{\mathcal{E}}))^t = \hat{\nu}^t. \quad (16)$$

L'equació (16) resulta ser una bona aproximació de la probabilitat que el veïnatge d'un vèrtex ni s'expandeixi ni s'extingeixi durant  $t$  passos.

Com que els veïnatges es poden acoblar amb processos de ramificació amb distribució de descendència  $D^* - 1$  (la descendència de l'arrel no és rellevant per a aquesta anàlisi) i  $\lambda_1 > 0$  implica  $\eta > 0$ , tenim que la probabilitat d'un veïnatge atípicament «prim» de longitud  $t$  és asimptòticament  $\hat{\nu}^t$ , on

$$\hat{\nu} := \mathbb{E}[\hat{\xi}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k \geq 1} k(k-1)\eta^{k-2}\lambda_k \in (0, 1).$$

Com que hi ha un nombre lineal de vèrtexs a la component gegant, aap tindrem vèrtexs amb veïnatges «prim» de longitud  $t = \frac{\log n}{|\log \hat{\nu}|}$ . Els vèrtexs al final d'aquests veïnatges «prim» es comportaran com a vèrtexs triats uniformement a l'atzar, i la seva distància vindrà donada pel teorema 19.

Fernholz i Ramachandran ([19]) van demostrar que aquesta intuïció és correcta i el diàmetre és d'ordre logarítmic amb la constant principal donada per les contribucions anteriors.

TEOREMA 20. *Suposem que  $\mathbf{d}$  satisfà la hipòtesi A. Si  $\nu < 1$ ,*

$$\text{diam}(C_1(\mathbb{G}_n)) \sim \frac{\log n}{|\log \nu|}.$$

Si  $\nu > 1$  i  $\lambda_1 > 0$ ,

$$\text{diam}(C_1(\mathbb{G}_n)) \sim \left( \frac{1}{\log \nu} + \frac{2}{|\log \hat{\nu}|} \right) \log n.$$

### 6.3 Grafs aleatoris dirigits

Sota les hipòtesis descrites a la subsecció 5.6, podem estudiar les distàncies típiques [29] i el diàmetre [8] dels grafs aleatoris dirigits en el règim supercrític, donat per  $\bar{\nu} > 1$ ; vegeu (13)–(14).

Siguin  $U_n$  i  $V_n$  triats independentment i de manera uniforme de  $[n]$ . Condiçionat al fet que  $U_n$  i  $V_n$  estiguin a la mateixa component fortament connexa de  $\bar{\mathbb{G}}_n$ , aap

$$\text{dist}(U_n, V_n) \sim \frac{\log n}{\log \bar{\nu}},$$

i

$$\text{diam}(C_1(\bar{\mathbb{G}}_n)) \sim \left( \frac{1}{\log \bar{\nu}} + \frac{1}{|\log \hat{\nu}^-|} + \frac{1}{|\log \hat{\nu}^+|} \right) \log n,$$

on  $\hat{\nu}^-$  i  $\hat{\nu}^+$  són constants que s'obtenen com a esperances de certes distribucions de descendència relacionades amb la seqüència de digraus, esbiaixada per la mida (vegeu [8] per a una definició precisa).

## 7 Grafs aleatoris densos

La gran majoria dels resultats presentats en les seccions anteriors són per a seqüències de graus que satisfan la hipòtesi A, la qual cosa en particular implica que el graf té poques arestes. Tot i que les xarxes que trobem al món real acostumen a tenir relativament poques connexions comparat amb el nombre d'elements, des del punt de vista combinatori, és interessant entendre aquells casos en què el nombre mitjà de connexions tendeix cap a infinit quan  $n$  també ho fa. En aquesta secció discutirem alguns resultats per a grafs aleatoris densos, les seqüències de graus dels quals poden tenir variància, o fins i tot esperança, no acotada. El principal entrebanc a l'hora d'estudiar aquestes seqüències és que la probabilitat que el model de configuració sigui simple tendeix ràpidament a zero (vegeu el teorema 4). Explicarem com superar aquest obstacle introduint el mètode de commutació i discutirem com s'aplica aquesta tècnica en dos contextos: l'enumeració i el mostreig de grafs amb una seqüència de graus donada.

### 7.1 El mètode de commutació (*switching*)

El mètode de commutació per a grafs aleatoris va ser introduït per McKay [38]. Es tracta d'una forma particular de l'argument clàssic de doble recompte i, en el context dels grafs aleatoris, es pot descriure com segueix. Sigui  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n, \mathbf{d}_n}$  el conjunt de grafs de  $\mathcal{G}_{n, \mathbf{d}_n}$  que satisfan certa propietat. El nostre objectiu és calcular la probabilitat que un graf aleatori sigui a  $\mathcal{P}_n$ , és a dir,

$$\mathbb{P}(\mathbb{G}_n \in \mathcal{P}_n) = \frac{|\mathcal{P}_{n, \mathbf{d}_n}|}{|\mathcal{G}_{n, \mathbf{d}_n}|} = \frac{|\mathcal{P}_n|}{|\mathcal{P}_n| + |\mathcal{P}_n^c|} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad (17)$$

on  $\alpha = |\mathcal{P}_n|/|\mathcal{P}_n^c|$  és la raó entre el nombre de grafs que tenen la propietat i els que no la tenen.

El mètode de commutació ens permet estimar  $\alpha$  mitjançant un argument basat en una operació simple anomenada commutació (*switch*). Per a  $G \in \mathcal{P}_n$  i  $H \in \mathcal{P}_n^c$ , sigui  $d(G, H)$  el nombre de maneres en què  $H$  es pot obtenir a partir de  $G$  mitjançant una commutació, i definim  $\bar{d}(G) = \sum_{H \in \mathcal{P}_n^c} d(G, H)$ . De manera similar, podem definir  $\bar{d}(H)$  com el nombre de maneres en què  $H$  es pot obtenir a partir d'un graf de  $\mathcal{P}_n$ . Llavors,

$$\bar{d}(\mathcal{P}_n)|\mathcal{P}_n| = \sum_{G \in \mathcal{P}_n} \bar{d}(G) = \sum_{H \in \mathcal{P}_n^c} \bar{d}(H) = \bar{d}(\mathcal{P}_n^c)|\mathcal{P}_n^c|,$$

on  $\bar{d}(\mathcal{A})$  és el grau mitjà al conjunt  $\mathcal{A}$ . Aleshores  $\alpha = \bar{d}(\mathcal{P}_n^c)/\bar{d}(\mathcal{P}_n)$  i, estimant aquestes dues quantitats, podem obtenir una aproximació de  $\alpha$ .

Com a operació, una commutació és una modificació local del graf. La commutació més usada és el del cicle de longitud 4: donat  $G \in \mathcal{P}_n$  amb  $vw, xy \in E(G)$  i  $vx, wy \notin E(G)$ , obtenim el graf  $H \in \mathcal{P}_n^c$  eliminant les arestes  $vw, xy$  i afegint les arestes  $vx, wy$  (vegeu la figura 2(a)). Una altra possible operació és la commutació sobre un cicle de longitud 6: donat  $G \in \mathcal{P}_n$  amb

$vw, x_1y_1, x_2y_2 \in E(G)$  i  $vx_1, wy_2, x_2y_1 \notin E(G)$ , obtenim el graf  $H \in \mathcal{P}_n^c$  eliminant les arestes  $vw, x_1y_1, x_2y_2$  i afegint les arestes  $vx_1, wy_2, x_2y_1$  (vegeu la figura 2(b)). Aquests dos són exemples de commutacions senzilles; a la literatura s'han utilitzat commutacions més complexes per superar certes dificultats tècniques i estendre l'aplicabilitat del mètode.

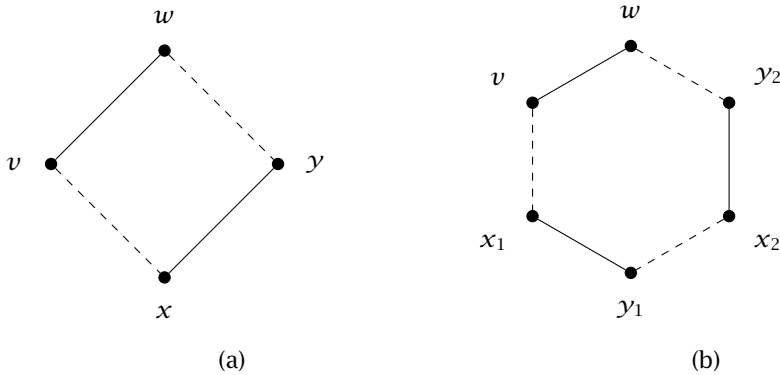


FIGURA 2: L'operació de commutació; les arestes representades amb línies contínues són reemplaçades per les representades amb línies discontinües: (a) commutació sobre un cicle de longitud 4; (b) commutació sobre un cicle de longitud 6.

Per il·lustrar el mètode, ara en donem un exemple. Donada  $\mathbf{d}_n$  i  $v, w \in [n]$  diferents, sigui  $\mathcal{P}_n$  el conjunt de grafs que contenen l'aresta  $vw$ . Farem commutacions sobre cicles de longitud 6 per estimar la probabilitat que  $vw \in E(\mathbb{G}_n)$ . Per una banda, donat un graf  $G \in \mathcal{P}_n$ , hem de trobar  $x_1y_1, x_2y_2 \in E(G)$  tals que  $vx_1, wy_2, x_2y_1 \notin E(G)$ . Hi ha  $m_n^2$  opcions per a  $x_1y_1, x_2y_2 \in E(G)$  qualssevol, d'on

- a com a màxim  $d_v \Delta_n m_n$  d'elles,  $x_1$  és incident a  $v$ ;
- a com a màxim  $d_w \Delta_n m_n$  d'elles,  $y_2$  és incident a  $w$ ;
- a com a màxim  $\Delta_n^2 m_n$  d'elles,  $y_1$  és incident a  $x_2$ .

Així doncs, el nombre total de commutacions és  $m_n^2(1 + O(\Delta_n^2/m_n))$  i  $\bar{d}(\mathcal{P}_n) = m_n^2(1 + O(\Delta_n^2/m_n))$ .

D'altra banda, donat un graf  $H \in \mathcal{P}_n^c$ , hem de trobar  $vx_1, wy_2, x_2y_1 \in E(H)$  tals que  $x_1y_1, x_2y_2 \notin E(H)$ . Hi ha  $d_v d_w m_n$  opcions per a  $vx_1, wy_2, x_2y_1 \in E(H)$  qualssevol, d'on

- a com a màxim  $d_v d_w \Delta_n^2$  d'elles,  $y_1$  és incident a  $x_1$ ;
- a com a màxim  $d_v d_w \Delta_n^2$  d'elles,  $x_2$  és incident a  $y_2$ .

Així doncs, el nombre total de commutacions és  $d_v d_w m_n(1 + O(\Delta_n^2/m_n))$  i  $\bar{d}(\mathcal{P}_n^c) = d_v d_w m_n(1 + O(\Delta_n^2/m_n))$ . Per (17), obtenim

$$\mathbb{P}(vw \in E(\mathbb{G}_n)) \sim \frac{d_v d_w}{m_n}, \tag{18}$$

sempre que  $\Delta_n^2 = o(m_n)$ . Animem el lector a comprovar la limitació de les commutacions sobre cicles de longitud 4 per calcular la probabilitat anterior.

Veient el resultat (18), es pot deduir que el mètode de commutació permetrà estudiar seqüències de graus sempre que el seu grau màxim no sigui massa gran respecte al nombre d'arestes. En les seccions següents apareixeran condicions similars a  $\Delta_n^2 = o(m_n)$ .

## 7.2 Enumeració

Un dels temes fonamentals en matemàtica discreta és l'enumeració d'objectes combinatoris. En el nostre cas, ens agradaria comptar quants grafs hi ha amb conjunt de vèrtexs  $[n]$  i seqüència de graus  $\mathbf{d}_n$ , és a dir, calcular  $|\mathcal{G}_{n,\mathbf{d}_n}|$ . En aquesta secció farem una introducció al tema. Remetem el lector interessat a l'article de Wormald [52] per a una anàlisi més detallada.

Una possible manera d'enfocar aquest problema és fer servir el model de configuració  $\mathbb{CM}_n = \mathbb{CM}_{n,\mathbf{d}_n}$  en combinació amb les estimacions sobre la probabilitat que el graf generat sigui simple. El nombre total d'aparellaments de les  $m_n$  semiaarestes és  $(m_n - 1)!!$ , però hi ha més d'un aparellament que dona lloc al mateix graf etiquetat; vegeu (1). Tot i això, com que el nombre d'aparellaments que donen lloc al mateix graf només depèn del nombre de llaços i arestes múltiples, és el mateix per a tots els grafs simples i obtenim el resultat següent:

$$|\mathcal{G}_{n,\mathbf{d}_n}| = \frac{(m_n - 1)!!}{\prod_{i \in [n]} d_i!} \cdot \mathbb{P}(\mathbb{CM}_n \text{ és simple}). \quad (19)$$

Com hem exposat a la secció 3, assumint la hipòtesi A, el nombre de llaços i d'arestes dobles es pot aproximar per distribucions de Poisson independents amb paràmetres  $\nu_n/2$  i  $\nu_n^2/4$ , i obtenir així el teorema 4, que reformulem ara en termes de  $\nu_n$ :

$$\mathbb{P}(\mathbb{CM}_n \text{ és simple}) \sim \exp\left(-\frac{\nu_n}{2} - \frac{\nu_n^2}{4}\right) > 0. \quad (20)$$

Combinat amb (19), ens dona el nombre asimptòtic de grafs amb una seqüència de graus donada sempre que se satisfaci la nostra hipòtesi.

Una línia de recerca central en grafs aleatoris és entendre com aquesta fórmula s'estén a altres seqüències de graus per a les quals  $\nu_n \rightarrow \infty$ . En la resta d'aquesta secció, discutirem la probabilitat de ser simple en termes de la relació entre  $\Delta_n$  i  $m_n$ .

Definim els següents *moments factorials* de  $D_n$ :

$$\gamma_n := \frac{1}{m_n} \sum_{i \in [n]} d_i(d_i - 1)(d_i - 2),$$

$$\mu_n := \frac{1}{m_n} \sum_{i \in [n]} d_i(d_i - 1)(d_i - 2)(d_i - 3).$$



Per obtenir una intuïció sobre quan l'aparició de llaços i arestes dobles perd el seu comportament poissonià, mirarem el nombre de llaços dobles  $DL_n$ , arestes triples  $T_n$  i arestes quàdruples  $Q_n$ , el nombre esperat de les quals es pot calcular seguint els mateixos passos que en (4). Si assumim que  $\sum_{i \in [n]} d_i^k = o((\sum_{i \in [n]} d_i)^k)$  per a  $k \in \{2, 3, 4\}$ , llavors tenim:

$$\mathbb{E}[DL_n] \sim \frac{\mu_n}{8m_n}, \quad \mathbb{E}[T_n] \sim \frac{\gamma_n^2}{12m_n}, \quad \mathbb{E}[Q_n] \sim \frac{\mu_n^2}{48m_n^2},$$

que implica

$$\mathbb{E}[DL_n] = O\left(\frac{\Delta_n^3}{m_n}\right), \quad \mathbb{E}[T_n] = O\left(\frac{\Delta_n^4}{m_n}\right), \quad \mathbb{E}[Q_n] = O\left(\frac{\Delta_n^6}{m_n^2}\right).$$

Per tant, si  $\Delta_n^4 = o(m_n)$ , no esperem ni llaços dobles ni arestes triples, de manera que els llaços i les arestes dobles apareixen de manera disjunta i les correlacions entre ells són febles. Per tant, l'aproximació de Poisson donada per (20) continua sent vàlida, com va demostrar McKay [39].

Si  $\Delta_n^3 = o(m_n)$ , no esperem ni llaços dobles ni arestes quàdruples, però el nombre d'arestes triples no és negligible, de manera que el nombre d'arestes dobles ja no es comportarà com una Poisson.

**TEOREMA 21.** *Suposem que  $\mathbf{d}_n$  satisfà  $\Delta_n^3 = o(m_n)$ . Llavors,*

$$\mathbb{P}(\text{CM}_n \text{ és simple}) \sim \exp\left(-\frac{\nu_n}{2} - \frac{\nu_n^2}{4} - \frac{1}{12m_n}(6\nu_n^2\gamma_n - 3\nu_n^4 - 2\gamma_n^2)\right).$$

Aquest resultat, provat per McKay i Wormald [42], és l'estimació més general coneguda per a aquest problema.

La prova del teorema 21 es basa en el mètode de commutació. La idea principal és obtenir un valor asimptòtic per a  $|\mathcal{P}_n(\ell, d, t)|$ , el nombre de configuracions amb  $\ell$  llaços,  $d$  arestes dobles i  $t$  arestes triples, estimant les raons següents:

$$\frac{|\mathcal{P}_n(\ell, d, t)|}{|\mathcal{P}_n(\ell, d, t-1)|}, \quad \frac{|\mathcal{P}_n(\ell, d, 0)|}{|\mathcal{P}_n(\ell-1, d, 0)|} \quad \text{i} \quad \frac{|\mathcal{P}_n(0, d, 0)|}{|\mathcal{P}_n(0, d-1, 0)|}.$$

Per tal de fer-ho s'utilitzen diferents tipus de commutacions per crear o destruir llaços, arestes dobles o arestes triples.

### 7.3 Mostreig

Un dels reptes centrals en la ciència de la computació teòrica és desenvolupar algorismes aleatoris eficients per generar objectes combinatoris d'acord amb una distribució específica. Un algorisme es considera eficient si el seu temps (o temps esperat) d'execució és un polinomi on la variable és la mida de l'entrada. Aquí estudiarem la generació de grafs de  $\mathcal{G}_{n, \mathbf{d}_n}$  en temps (o temps esperat) polinomial en  $n$ . Parlarem de dues famílies d'algorismes de mostreig:

*mostreig uniforme*, en què es generen grafs aleatoris seguint la distribució uniforme, i *mostreig quasiuniforme*, en què es generen grafs aleatoris d'una distribució de probabilitat molt propera a la uniforme. En aquesta secció presentem breument els mètodes més prominents i remetem el lector interessat a l'article de Greenhill [23].

Un algorisme senzill per mostrejar aquests grafs és generar un exemple utilitzant el model de configuració. Si el parell resultant és simple, per (2), serà un graf aleatori uniforme. En cas contrari, el descartem i repetim l'experiment fins que aquest tingui èxit. Aquest algorisme es coneix com a *mostreig per rebuig* i el seu temps d'execució esperat està determinat per la probabilitat que el model de configuració produeixi un graf simple. Usant el teorema 4, podem deduir que l'algorisme és eficient per a seqüències de graus que satisfan la hipòtesi A. De fet, permet mostrejar en temps polinomial qualsevol seqüència de graus que compleixi  $\Delta_n = O(\sqrt{\log n})$ .

McKay i Wormald ([41]) van proposar un algorisme basat en commutacions que realitza commutacions aleatòries per eliminar llaços i arestes dobles. Per tal d'obtenir la distribució uniforme, cal afegir una *probabilitat de rebuig* a cada pas. En el context més general de mostrejar aparellaments perfectes de grafs, Jerrum i Sinclair ([33]) van introduir un algorisme que funciona per a seqüències de graus *P-estables*, és a dir, seqüències  $\mathbf{d}_n$  en què el nombre de grafs amb aquesta seqüència de graus és estable sota petites pertorbacions de la seqüència. D'altra banda, Kannan, Tetali i Vempala ([36]) van introduir la *cadena de commutacions* (*switching chain* en anglès), una cadena de Markov amb espai d'estats  $\mathcal{G}_{n, \mathbf{d}_n}$  i transicions obtingudes mitjançant la realització d'una commutació triada uniformement a l'atzar. Es conjectura que la cadena és un mostrejador quasiuniforme eficient per a qualsevol seqüència de graus. Cooper, Dyer i Greenhill ([10]) van demostrar la conjectura per a grafs  $d$ -regulars, per a qualsevol  $1 \leq d \leq n - 1$ . Greenhill ([22]) ha estès aquest resultat per a seqüències de graus donades que satisfan  $\Delta_n^2 = O(m_n)$ , i, juntament amb Sfragara [24], a grafs dirigits.

Finalment, Steger i Wormald ([48]) van proposar un algorisme similar al model de configuració per generar grafs aleatoris quasiuniformes  $d$ -regulars, que ha estat estès a grafs aleatoris amb una seqüència de graus donada per Bayati, Kim i Saberi [2].

## Agraïments

L'autor dona les gràcies a Oriol Serra pels comentaris que han ajudat a millorar aquest article. L'autor d'aquest article ha rebut suport de l'Agència Estatal de Investigació a través del projecte PID2020-113082GB-I00, del projecte RED2022-134947-T, i del programa Severo Ochoa i María de Maeztu per a centres i unitats d'excel·lència en R + D (CEX2020-001084-M).

L'autor expressa el seu agraïment pels comentaris d'un revisor anònim, així com als correctors d'estil, a la tècnica d'edició i composició i als editors de la revista, que han contribuït significativament a millorar aquest article.

## Referències

- [1] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. «Statistical mechanics of complex networks». *Rev. Modern Phys.*, 74 (1) (2002), 47–97.
- [2] BAYATI, M.; KIM, J. H.; SABERI, A. «A sequential algorithm for generating random graphs». *Algorithmica*, 58 (4) (2010), 860–910.
- [3] BÉKÉSSY, A.; BÉKÉSSY, P.; KOMLÓS, J. «Asymptotic enumeration of regular matrices». *Studia Sci. Math. Hungar.*, 7 (1972), 343–353.
- [4] BENDER, E. A.; CANFIELD, E. R. «The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences». *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 24 (3) (1978), 296–307.
- [5] BOLLOBÁS, B. «A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs». *European J. Combin.*, 1 (4) (1980), 311–316.
- [6] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. «An old approach to the giant component problem». *J. Combin. Theory Ser. B*, 113 (2015), 236–260.
- [7] CAI, X. S.; PERARNAU, G. «The giant component of the directed configuration model revisited». *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 18 (2) (2021), 1517–1528.
- [8] CAI, X. S.; PERARNAU, G. «The diameter of the directed configuration model». *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 59 (1) (2023), 244–270.
- [9] COMELLAS, F. «Models deterministes de xarxes complexes». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 22 (1) (2007), 23–43.
- [10] COOPER, C.; DYER, M.; GREENHILL, C. «Sampling regular graphs and a peer-to-peer network». *Combin. Probab. Comput.*, 16 (4) (2007), 557–593.
- [11] COOPER, C.; FRIEZE, A. «The size of the largest strongly connected component of a random digraph with a given degree sequence». *Combin. Probab. Comput.*, 13 (3) (2004), 319–337.
- [12] COULSON, M.; PERARNAU, G. «Largest component of subcritical random graphs with given degree sequence». *Electron. J. Probab.*, 28 (2023), article núm. 34, 28 p.
- [13] DHARA, S.; VAN DER HOFSTAD, R.; VAN LEEUWAARDEN, J. S. H.; SEN, S. «Critical window for the configuration model: finite third moment degrees». *Electron. J. Probab.*, 22 (2017), article núm. 16, 33 p.
- [14] DHARA, S.; VAN DER HOFSTAD, R.; VAN LEEUWAARDEN, J. S. H.; SEN, S. «Heavy-tailed configuration models at criticality». *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 56 (3) (2020), 1515–1558.
- [15] DUMINIL-COPIN, H. «Sharp threshold phenomena in statistical physics». *Jpn. J. Math.*, 14 (1) (2019), 1–25.
- [16] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. «On the evolution of random graphs». *Bull. Inst. Internat. Statist.*, 38 (1961), 343–347.

- [17] FEDERICO, L.; VAN DER HOFSTAD, R. «Critical window for connectivity in the configuration model». *Combin. Probab. Comput.*, 26 (5) (2017), 660–680.
- [18] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Nova York: John Wiley, 1968.
- [19] FERNHOLZ, D.; RAMACHANDRAN, V. «The diameter of sparse random graphs». *Random Structures Algorithms*, 31 (4) (2007), 482–516.
- [20] FOUNTOULAKIS, N. «Percolation on sparse random graphs with given degree sequence». *Internet Math.*, 4 (4) (2007), 329–356.
- [21] FRIEZE, A.; KAROŃSKI, M. *Introduction to Random Graphs*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [22] GREENHILL, C. «The switch Markov chain for sampling irregular graphs (extended abstract)». A: *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. Filadèlfia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2015, 1564–1572.
- [23] GREENHILL, C. «Generating graphs randomly». A: *Surveys in Combinatorics 2021*. Cambridge: Cambridge University Press, 2021, 133–186. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; 470)
- [24] GREENHILL, C.; SFRAGARA, M. «The switch Markov chain for sampling irregular graphs and digraphs». *Theoret. Comput. Sci.*, 719 (2018), 1–20.
- [25] HATAMI, H.; MOLLOY, M. «The scaling window for a random graph with a given degree sequence». *Random Structures Algorithms*, 41 (1) (2012), 99–123.
- [26] VAN DER HOFSTAD, R. *Random Graphs and Complex Networks*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. (Camb. Ser. Stat. Probab. Math.; 43)
- [27] VAN DER HOFSTAD, R. *Random Graphs and Complex Networks*. Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2024. (Camb. Ser. Stat. Probab. Math.)
- [28] VAN DER HOFSTAD, R.; JANSON, S.; LUCZAK, M. «Component structure of the configuration model: barely supercritical case». *Random Structures Algorithms*, 55 (1) (2019), 3–55.
- [29] VAN DER HOORN, P.; OLVERA-CRAVIOTO, M. «Typical distances in the directed configuration model». *Ann. Appl. Probab.*, 28 (3) (2018), 1739–1792.
- [30] JANSON, S. «On percolation in random graphs with given vertex degrees». *Electron. J. Probab.*, 14 (5) (2009), 87–118.
- [31] JANSON, S. «The probability that a random multigraph is simple». *Combin. Probab. Comput.*, 18 (1-2) (2009), 205–225.
- [32] JANSON, S.; LUCZAK, M. «A new approach to the giant component problem». *Random Structures Algorithms*, 34 (2) (2009), 197–216.
- [33] JERRUM, M.; SINCLAIR, A. «Fast uniform generation of regular graphs». *Theoret. Comput. Sci.*, 73 (1) (1990), 91–100.

- [34] JOOS, F.; PERARNAU, G.; RAUTENBACH, D.; REED, B. «How to determine if a random graph with a fixed degree sequence has a giant component». *Probab. Theory Related Fields*, 170 (1-2) (2018), 263-310.
- [35] JOSEPH, A. «The component sizes of a critical random graph with given degree sequence». *Ann. Appl. Probab.*, 24 (6) (2014), 2560-2594.
- [36] KANNAN, R.; TETALI, P.; VEMPALA, S. «Simple Markov-chain algorithms for generating bipartite graphs and tournaments». *Random Structures Algorithms*, 14 (4) (1999), 293-308.
- [37] ŁUCZAK, T. «Sparse random graphs with a given degree sequence». A: *Random Graphs*. Vol. 2 (Poznań, 1989). Nova York: John Wiley & Sons, Inc., 1992, 165-182. (Wiley-Intersci. Publ.)
- [38] MCKAY, B. D. «Subgraphs of random graphs with specified degrees». *Congr. Numer.*, 33 (1981), 213-223.
- [39] MCKAY, B. D. «Asymptotics for symmetric 0-1 matrices with prescribed row sums». *Ars Combin.*, 19 (1985), 15-25.
- [40] MCKAY, B. D. «Subgraphs of random graphs with specified degrees». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume IV*. Nova Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 2489-2501.
- [41] MCKAY, B. D.; WORMALD, N. C. «Uniform generation of random regular graphs of moderate degree». *J. Algorithms*, 11 (1) (1990), 52-67.
- [42] MCKAY, B. D.; WORMALD, N. C. «Asymptotic enumeration by degree sequence of graphs with degrees  $o(n^{1/2})$ ». *Combinatorica*, 11 (4) (1991), 369-382.
- [43] MOLLOY, M.; REED, B. «A critical point for random graphs with a given degree sequence». *Random Structures Algorithms*, 6 (2-3) (1995), 161-179.
- [44] MOLLOY, M.; REED, B. «The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence». *Combin. Probab. Comput.*, 7 (3) (1998), 295-305.
- [45] NEWMAN, M. E. J. «The structure and function of complex networks». *SIAM Rev.*, 45 (2) (2003), 167-256.
- [46] RIORDAN, O. «The phase transition in the configuration model». *Combin. Probab. Comput.*, 21 (1-2) (2012), 265-299.
- [47] RUÉ, J. «De la teoria de grafs clàssica a l'anàlisi de les grans xarxes». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 38 (1) (2023), 67-105.
- [48] STEGER, A.; WORMALD, N. C. «Generating random regular graphs quickly». *Combin. Probab. Comput.*, 8 (4) (1999), 377-396.
- [49] WORMALD, N. C. «Some problems in the enumeration of labelled graphs». Tesi doctoral. Newcastle: University of Newcastle, 1978.
- [50] WORMALD, N. C. «The asymptotic distribution of short cycles in random regular graphs». *J. Combin. Theory Ser. B*, 31 (2) (1981), 168-182.

- [51] WORMALD, N. C. «Models of random regular graphs». A: *Surveys in Combinatorics, 1999*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 239-298. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; 267)
- [52] WORMALD, N. C. «Asymptotic enumeration of graphs with given degree sequence». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. IV. Invited lectures*. Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2018, 3245-3264.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
CAMPUS DIAGONAL SUD, EDIFICI U, C. DE PAU GARGALLO, 14,  
08028 BARCELONA  
I CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA  
EDIFICI C, CAMPUS DE LA UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA,  
08193 BELLATERRA (CERDANYOLA DEL VALLÈS)  
guillem.perarnau@upc.edu

## English summaries

**Rosa Camps, Xavier Mora and Laia Saumell**

*The method of Eneström and Phragmén for electing a body of representatives by means of open lists*

The election of a body of representatives through open list voting requires a suitable algorithm to determine which candidates are selected. The option of selecting the most voted candidates has the serious drawback of potentially leaving many voters without representation. In this paper, we study an alternative, fairer algorithm that was proposed at the turn of the 19th century by Gustaf Eneström and Edvard Phragmén. In common with other proposals by Phragmén himself, it is assumed that the voters express themselves by means of approval voting, that is, each voter indicates an unordered list of the candidates that he deems suitable to represent him. Unlike other methods of the same type, here one starts by setting a quota, that is, the number of votes that give the right to a seat. In fact, Eneström and Phragmén's method may be seen as an extension of the method of largest remainders to open lists instead of closed lists, or also as an adaptation of the single transferable vote to approval voting instead of preferential voting. The properties of this method are studied and compared with those of other methods of the same type.

**Keywords:** open lists, electing a body of representatives, parliamentary elections, proportional representation, method of Eneström and Phragmén.

**MSC2020 Subject Classification:** 91B12, 91B14.

---

**Núria Fagella and Joan Porti**

*Two theorems and one proof by Dennis Sullivan*

In 1983, Dennis Sullivan solved a problem in holomorphic dynamics concerning rational maps of the Riemann sphere, which remained unsolved for more than 60 years. Using the same techniques, he provided a new proof for a theorem on Kleinian groups due to Ahlfors. This initiated a period of intense activity and interaction between both areas.

Keywords: holomorphic dynamics, rational transformation, wandering domain, Kleinian group, Riemann surface.

MSC2020 Subject Classification: 37F31, 37F32, 30F40.

---

**Guillem Perarnau**

*Random graphs with a given degree sequence*

Since the emergence of the notion of complex networks, random graphs have become a fundamental tool for their modeling and analysis. In this paper we address the study of random graphs with a given degree sequence, where the degree of each vertex is predetermined and a random instance that meets these constraints is chosen. Our aim is to introduce the newcomers to this topic by presenting the most relevant results in this area and providing intuition as to why they are valid, without delving into rigorous proofs.

Keywords: random graphs, degree sequence, models for complex networks, connected components, graph distances, graph enumeration, random graph sampling.

MSC2020 Subject Classification: 05C80, 05C82.

---



# Instruccions per als autors

Els articles sotmesos a publicació s'han d'enviar als editors o a qualsevol membre del comitè editorial per correu electrònic, preferentment en format PDF. Els originals han de contenir la versió anglesa del títol, un resum breu en català i en anglès, paraules clau en català i en anglès i els codis de la classificació per matèries MSC2020.

Les versions definitives dels articles acceptats s'han de presentar en codi  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , preferentment en l'estil  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  propi del BUTLLETÍ. Aquest estil es pot obtenir a les pàgines web de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM). Es recomana una extensió d'entre 15 i 35 pàgines. Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per a separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per a poder facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques. Per tal d'accelerar el procés de producció, es prega als autors que segueixin les indicacions contingudes en el document d'exemple.

La versió en paper del BUTLLETÍ s'imprimeix en blanc i negre. Quan un article contingui figures en color i es consideri convenient, l'autor proporcionarà una versió dels gràfics substituint el color per tons de grisos i línies de gruix variable. Així mateix, modificarà els comentaris que facin referència al color de les figures. En qualsevol cas, el BUTLLETÍ publicarà l'original en color en el seu format electrònic.

La propietat intel·lectual dels articles és dels respectius autors.

Els autors, en el moment de lliurar els articles al BUTLLETÍ per a sol·licitar-ne la publicació, accepten els termes següents:

— Els autors cedeixen a la SCM (filial de l'Institut d'Estudis Catalans) els drets de reproducció, comunicació pública i distribució dels articles presentats per a ser publicats al BUTLLETÍ.

— Els autors responen davant la SCM de l'autoria i l'originalitat dels articles presentats.

— És responsabilitat dels autors l'obtenció dels permisos per a la reproducció de tot el material gràfic inclòs en els articles.

— La SCM està exempta de tota responsabilitat derivada de l'eventual vulneració de drets de propietat intel·lectual per part dels autors.

Cada autor rebrà una còpia en PDF d'alta qualitat de la versió digital del seu article i un exemplar imprès del número del BUTLLETÍ en el qual es publiqui.

La correspondència administrativa relacionada amb el BUTLLETÍ s'ha d'adreçar a la SCM.

Pel que fa a la protecció de dades personals, l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) compleix el que estableix el Reglament general de protecció de dades de la Unió Europea (Reglament 2016/679, del 27 d'abril de 2016). De conformitat amb aquesta norma, s'informa que, amb l'acceptació de les normes de publicació, els autors autoritzen que les seves dades personals (nom i cognoms, dades de contacte i dades de filiació) puguin ser publicades en el corresponent volum del BUTLLETÍ.

Aquestes dades seran incorporades a un tractament que és responsabilitat de l'IEC amb la finalitat de gestionar aquesta publicació. Únicament s'utilitzaran les dades dels autors per a gestionar la publicació del BUTLLETÍ i no seran cedides a tercers, ni es produiran transferències a tercers països o organitzacions internacionals. Un cop publicat el BUTLLETÍ, aquestes dades es conservaran com a part del registre històric d'autors. Els autors poden exercir els drets d'accés, rectificació, supressió, oposició, limitació en el tractament i portabilitat, adreçant-se per escrit a l'Institut d'Estudis Catalans (carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona), o bé enviant un correu electrònic a l'adreça [dades.personals@iec.cat](mailto:dades.personals@iec.cat), en què s'especifiqui de quina publicació es tracta.

## Comitè editorial

Antoni Guillamon (editor en cap)  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Politècnica de Catalunya  
antoni.guillamon@upc.edu

Carme Cascante  
Dep. de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona  
cascante@ub.edu

Bartomeu Coll  
Dep. de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de les Illes Balears  
tomeu.coll@uib.cat

Núria Fagella  
Dep. de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona  
fagella@maia.ub.es

Armengol Gasull  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
armengol.gasull@uab.cat

Gábor Lugosi  
ICREA i Departament d'Economia  
Universitat Pompeu Fabra  
gabor.lugosi@upf.edu

Rosa Camps (editora adjunta)  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
rosa.camps@uab.cat

Marc Noy  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Politècnica de Catalunya  
marc.noy@upc.edu

Francesc Planas  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Politècnica de Catalunya  
francesc.planas@upc.edu

Joan Saldaña  
Dep. d'Informàtica, Mat. Aplicada i Estadística  
Universitat de Girona  
joan.saldana@udg.edu

Marta Sanz-Solé  
Dep. de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona  
marta.sanz@ub.edu

Gil Solanes  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
gil.solanes@uab.cat



## Societat Catalana de Matemàtiques

La **Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)** és una societat filial de l'Institut d'Estudis Catalans que continua les activitats de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències, que fou fundada per l'Institut l'any 1931. Les finalitats de la **SCM** són: el conreu de les ciències matemàtiques, l'extensió del seu coneixement en la societat catalana, el foment del seu ensenyament i de la seva investigació teòrica i aplicada, així com la publicació de tota mena de treballs que s'adeqüin a aquests objectius. La **SCM** desenvolupa les seves activitats en les terres de llengua i cultura catalanes. El català és, doncs, la llengua pròpia de la **SCM** i la que és usada normalment en tots els seus actes i publicacions.

La **SCM** edita les publicacions periòdiques *SCM/Notícies*, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, *NouBiaix* (en col·laboració amb la FEEMCAT) i *Reports@SCM*. Els socis de la **SCM** reben, gratuïtament, aquestes publicacions.

La **SCM** té convenis de reciprocitat amb diverses societats matemàtiques d'arreu del món, mitjançant els quals els socis de la **SCM** obtenen una reducció en la quota de soci d'aquestes societats. Així mateix, els socis de la **SCM** poden fer-se socis de la Societat Matemàtica Europea pagant una quota complementària.

La Junta Directiva de la **SCM** està constituïda per les persones següents:

PRESIDENTA: Montserrat Alsina i Aubach

VICEPRESIDENT: Josep Vives i Santa-Eulàlia

SECRETÀRIA: Margarida Mitjana i Riera

TRESORER: Albert Granados i Corsellas

VOCALS: Clara Mateo Campo, Laura Prat Baiget, David Virgili Correas

DELEGAT DE L'IEC: Joaquim Bruna i Floris

L'adreça de la **SCM** és carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona. Telèfon: 933 248 583. Fax: 932 701 180. Correu electrònic: [scm@iec.cat](mailto:scm@iec.cat). Adreça web: <https://scm.iec.cat>.



El BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES publica, en llengua catalana, exposicions matemàtiques de qualitat, que puguin interessar a un nombre elevat de lectors. Es donarà prioritat a aquells treballs en què destaquin la claredat d'exposició i l'interès general del tema. El BUTLLETÍ està obert a tots els camps de la matemàtica i també als aspectes matemàtics de les ciències experimentals, la tecnologia, l'economia, etc., així com a altres àrees, com la història, la didàctica i la filosofia, sempre que els treballs tinguin un component matemàtic important. També tenen cabuda al BUTLLETÍ aquells articles que desenvolupin un aspecte significatiu de la problemàtica de la professió matemàtica al nostre país.

El BUTLLETÍ publica un volum a l'any, dividit en dos números, que es trameten gratuïtament a tots els socis. El BUTLLETÍ es publica també en format electrònic. L'edició electrònica del BUTLLETÍ pot obtenir-se des del portal de revistes científiques en línia de l'IEC o al servidor <https://scm.iec.cat>.

La correspondència administrativa s'ha d'adreçar a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Editor en cap \_\_\_\_\_

Antoni Guillamon

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Editora adjunta \_\_\_\_\_

Rosa Camps

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Comitè Editorial \_\_\_\_\_

Carne Cascante

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Marc Noy

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Bartomeu Coll

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de les Illes Balears

Francesc Planas

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Núria Fagella

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Joan Saldaña

Dep. d'Informàtica, Mat. Aplicada i Estadística

Universitat de Girona

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Marta Sanz-Solé

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Gábor Lugosi

ICREA i Departament d'Economia

Universitat Pompeu Fabra

Gil Solanes

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

---

Societat Catalana de Matemàtiques

Carrer del Carne, 47 - 08001 Barcelona

tel. 933 248 583 - fax 932 701 180

[scm@iec.cat](mailto:scm@iec.cat) - <https://scm.iec.cat>